

Forschungszentrum Karlsruhe

in der Helmholtz-Gemeinschaft

Wissenschaftliche Berichte

FZKA 6963

Eine mehrskalige Näherungslösung für die zeitabhängige Boltzmann-Transportgleichung

Bruno Merk

Institut für Reaktorsicherheit

Von der Fakultät für Maschinenbau
der Universität Karlsruhe (TH) genehmigte Dissertation

Eine mehrskalige Näherungslösung für die zeitabhängige Boltzmann- Transportgleichung

Zur Erlangung des akademischen Grades

eines

Doktors der Ingenieurwissenschaften

von der Fakultät für Maschinenbau der

Universität Karlsruhe

genehmigte

Dissertation

von

Dipl. – Ing. Bruno Merk

aus

Dietmannsried

Tag der mündlichen Prüfung: 12. Januar 2004

Hauptreferent: Prof. Dr. Dr. h. c. mult. Dan G. Cacuci

Korreferent: Prof. Dr. A. Bayer

Danksagung

Ich möchte Herrn Prof. Cacuci für die Anregung zu dieser Arbeit danken; Herrn Prof. A. Bayer für die Übernahme des Korreferats und Herrn Dr. Broeders für die Begleitung während der Arbeit.

Den Herrn Dr. Böhme, Dr. Dagan, Dr. Sanchez-Espinoza und Dr. Jaag danke ich für die hilfreichen Ratschläge während der Ausformulierung der Arbeit.

Meiner Freundin Elfriede Derrer danke ich für die Geduld, die sie mir während der Entstehung dieser Arbeit entgegengebracht hat.

KURZFASSUNG

Grundlage für die Simulation von Betriebstransienten und Störfällen in Kernreaktoren ist die zuverlässige Berechnung des Zeitverlaufes der nuklearen Leistung im Reaktorkern. Die nukleare Leistungserzeugung wird aus dem sowohl räumlich als auch zeitlich veränderlichen Neutronenfluss berechnet. Der Neutronenfluss wird durch die raum-, zeit-, richtungs- und energieabhängige Boltzmann-Gleichung (Transportgleichung) beschrieben. Die Berechnung exakter Lösungen der Boltzmann-Gleichung ist sehr zeitintensiv, deshalb sind für die praktische Anwendung Näherungslösungen im Allgemeinen unumgänglich.

Ziel der Arbeit ist die Entwicklung einer effektiven mehrskaligen Näherungslösung für die Boltzmann-Gleichung. Im Rahmen der neu zu entwickelnden Lösung soll, im Gegensatz zu den bisher veröffentlichten Methoden, auf eine Trennung von Raum und Zeit verzichtet werden. Die effektive Näherungslösung basiert auf einer Multiple Scale Expansion des Zeitdifferentials der verschiedenen Näherungen der Boltzmann-Gleichung. Die Methode der Multiple Scale Expansion wird zur Reihenentwicklung der Zeitableitung angewendet, weil das Problem des steifen Zeitverhaltens durch standardmäßige Reihenentwicklungen nicht gelöst werden kann.

Multiple Scale Expansionslösungen werden im Rahmen dieser Arbeit für verschiedene Näherungen für die Boltzmann-Gleichung, beginnend mit der Expansionslösung für die punktkinetischen Gleichungen, entwickelt. Anhand der Expansionslösung für die punktkinetischen Gleichungen wird sowohl die Anwendbarkeit als auch die Genauigkeit des Verfahrens der Multiple Scale Expansion für eine Näherungslösung mit 2 Gruppen verzögerter Neutronen getestet. Die Ergebnisse werden mit den exakten analytischen Ergebnissen für die punktkinetischen Gleichungen verglichen, um die sehr gute Übereinstimmung zu demonstrieren. Zusätzlich wird die Anwendbarkeit der Näherungslösung mit 2 Gruppen verzögerter Neutronen als Näherung für ein System mit 6 Gruppen verzögerter Neutronen untersucht und eine Strategie zur Entwicklung einer Lösung mit 4 Gruppen verzögerter Neutronen aufgezeigt. Eine Multiple Scale Expansionslösung wird für die raum-zeitabhängige Diffusionsgleichung für eine homogenisierte Zelle und 2 Gruppen verzögerter Neutronen entwickelt. Das Ergebnis wird wiederum mit der exakten analytischen Lösung verglichen, dies führt zu guter Übereinstimmung.

In den folgenden Schritten werden Multiple Scale Expansionslösungen für die raum-zeitabhängigen P_1 und P_3 Transportgleichungen, ebenfalls für eine homogenisierte Zelle und 2 Gruppen verzögerter Neutronen, entwickelt. Diese mehrskaligen Lösungen werden im Vergleich mit der Diffusionslösung, im Bezug auf die Unterschiede in der Raum-Zeitstruktur zwischen der Diffusions- und der Transportlösung, analysiert. Der Effekt der zusätzlichen Differentialterme in den P_1 und P_3 Gleichungen kann sowohl in der analytischen Entwicklung als auch in der graphischen Auswertung der Differenzen zwischen der Diffusions- und der Transportlösung beobachtet werden.

Die entwickelte Lösung wird für die direkte Berechnung des Zeitverhaltens einzelner Nodes im Rahmen eines nodalen Rechencodes getestet und die Ergebnisse untersucht. Es ist offensichtlich, dass die Unterschiede in der Qualität der Ergebnisse der Näherungslösung im Vergleich zur nodalen Referenzlösung maßgeblich von der Art der eingeführten Störung abhängen.

Zuletzt wird eine Lösungsstrategie, nutzbar für große Zeitschritte in der Berechnung des raum-zeitabhängigen Neutronenflusses, auf der Basis der Superposition der Störungen entwickelt. Diese neu entwickelte Strategie wird in einer Reihe von Testrechnungen mit einem nodalen Code verifiziert. Sie eröffnet einen neuen, effizienten Weg zur Simulation des Raum-Zeitverhaltens des Neutronenflusses in Reaktorkernen.

ABSTRACT

A Multi Scale Approximation Solution for the Time Dependent Boltzmann-Transport Equation

The basis of all transient simulations for nuclear reactor cores is the reliable calculation of the power production. The local power distribution is generally calculated by solving the space, time, energy and angle dependent neutron transport equation known as Boltzmann equation. The computation of exact solutions of the Boltzmann equation is very time consuming. For practical numerical simulations approximated solutions are usually unavoidable.

The objective of this work is development of an effective multi scale approximation solution for the Boltzmann equation. Most of the existing methods are based on separation of space and time. The new suggested method is performed without space-time separation. This effective approximation solution is developed on the basis of an expansion for the time derivative of different approximations to the Boltzmann equation. The method of multiple scale expansion is used for the expansion of the time derivative, because the problem of the stiff time behaviour can't be expressed by standard expansion methods.

This multiple scale expansion is used in this work to develop approximation solutions for different approximations of the Boltzmann equation, starting from the expansion of the point kinetics equations. The resulting analytic functions are used for testing the applicability and accuracy of the multiple scale expansion method for an approximation solution with 2 delayed neutron groups. The results are tested versus the exact analytical results for the point kinetics equations. Very good agreement between both solutions is obtained. The validity of the solution with 2 delayed neutron groups to approximate the behaviour of the system with 6 delayed neutron groups is demonstrated in an additional analysis. A strategy for a solution with 4 delayed neutron groups is described. A multiple scale expansion is performed for the space-time dependent diffusion equation for one homogenized cell with 2 delayed neutron groups. The result is once more compared with the exact analytical solution obtaining good agreement. In the next steps multiple scale expansion solutions are developed for the space-time dependent P_1 and P_3 transport equations for the homogenized cell and 2 delayed neutron groups. These results are analysed versus the solution for the diffusion equation emphasizing the differences in the space-time structure between the time dependent diffusion- and transport solutions. The effect of the additional derivation terms in the transport equations can be observed during the analytical expansion process and in the graphical analysis of the differences between the solutions.

The developed solution is tested for direct calculation of the time behaviour of single nodes in the framework of a nodal code and the results are compared. It is evident that the nature of the inserted perturbation has major impact on the discrepancy of the results compared to the reference nodal method.

Finally a solution strategy usable for big time steps is given for the space-time dependent neutron flux based on superposition of perturbations. This newly developed strategy is verified in a series of test calculations using a nodal code. A new efficient way for the simulation of the space-time dependent neutron flux distribution in nuclear reactor cores is given.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Grundlagen	3
2.1	<i>Die Transportgleichung</i>	3
2.2	<i>Finite Differenzen- und Finite Elementeverfahren</i>	5
2.3	<i>Punktreaktor Modell</i>	6
2.4	<i>Modale Verfahren</i>	7
2.5	<i>Nodale, oder Grobgitterverfahren</i>	8
2.6	<i>Faktorisierungsverfahren</i>	9
2.7	<i>Anwendung der verschiedenen Verfahren</i>	10
2.8	<i>Analytisches Expansionsverfahren</i>	11
3	Multiple Scale Expansion der punktkinetischen Gleichungen	12
3.1	<i>Entwicklung der analytischen Näherungsfunktionen</i>	12
3.1.1	Lösung der punktkinetischen Gleichung mit einer Gruppe verzögerter Neutronen	12
3.1.2	Lösung des Systems mit zwei Gruppen verzögerter Neutronen	14
3.2	<i>Testrechnungen</i>	20
3.2.1	Anwendbarkeit des Entwicklungsverfahrens	20
3.2.2	Genauigkeit der Näherungslösung	22
3.2.3	Anwendbarkeit der Näherung mit 2 Gruppen verzögerter Neutronen	30
3.3	<i>Zusammenfassung</i>	33
4	Multiple Scale Expansion der Diffusionsgleichung	34
4.1	<i>Entwicklung der analytischen Näherungsfunktionen</i>	34
4.1.1	Lösung der Diffusionsgleichung mit einer Gruppe verzögerter Neutronen	34
4.1.2	Lösung des Systems mit zwei Gruppen verzögerter Neutronen	37
4.2	<i>Testrechnungen</i>	47
4.3	<i>Zusammenfassung</i>	53

5	Multiple Scale Expansion der P_1 Neutronentransportgleichung	54
5.1	<i>Entwicklung der analytischen Näherungsfunktionen</i>	54
5.1.1	Lösung der P_1 Transportgleichung mit einer Gruppe verzögerter Neutronen	54
5.1.2	Lösung der P_1 Transportgleichung mit zwei Gruppen verzögerter Neutronen	58
5.2	<i>Testrechnungen</i>	68
5.3	<i>Zusammenfassung</i>	78
6	Multiple Scale Expansion der P_3 Neutronentransportgleichung	79
6.1	<i>Entwicklung der analytischen Näherungsfunktionen</i>	79
6.1.1	Lösung der P_3 Transportgleichung mit zwei Gruppen verzögerter Neutronen	79
6.2	<i>Testrechnungen</i>	96
6.3	<i>Zusammenfassung</i>	109
7	Anwendung innerhalb eines nodalen Verfahrens	111
7.1	<i>Testrechnungen</i>	111
7.2	<i>Zusammenfassung</i>	122
8	Strategie zur Weiterentwicklung des Verfahrens	123
9	Zusammenfassung	133
10	Literaturverzeichnis	135

Abbildungsverzeichnis

Abb. 2-1: Illustration der Maschenrepräsentation für das Finite Differenzenverfahren	6
Abb. 2-2: Illustration der Maschenrepräsentation für das Punktreaktor Modell.....	7
Abb. 2-3: Illustration der Maschenrepräsentation für eine einfache Form des Modalen Verfahrens	8
Abb. 2-4: Illustration der Maschenrepräsentation im Nodalen Verfahren mit zwei Nodes; die Koppelung zwischen den Knoten ist durch die gestrichelte Linie symbolisiert	9
Abb. 2-5: Illustration der Maschenrepräsentation für das Quasistatische Verfahren mit Prediktor – Korrektor Schrittweise	10
Abb. 3-1: Vergleich der Rechenergebnisse für die zeitliche Änderung der Neutronenpopulation, hervorgerufenen durch eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.9 \$$)	22
Abb. 3-2: Vergleich der Rechenergebnisse für die zeitliche Änderung der Neutronenpopulation, hervorgerufenen durch eine negative Reaktivitätsstörung ($\rho = - 0.3 \$$)	23
Abb. 3-3: Vergleich der Rechenergebnisse für die zeitliche Änderung der Neutronenpopulation, hervorgerufenen durch eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$)	23
Abb. 3-4: Vergleich der Rechenergebnisse für die zeitliche Änderung der Neutronenpopulation, hervorgerufenen durch eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.95 \$$)	24
Abb. 3-5: Vergleich der Rechenergebnisse für die zeitliche Änderung der Neutronenpopulation, hervorgerufenen durch eine prompt kritische Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$)	24
Abb. 3-6: Vergleich der Rechenergebnisse für die zeitliche Änderung der Neutronenpopulation, hervorgerufenen durch eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$)	25
Abb. 3-7: Vergleich der Rechenergebnisse für die zeitliche Änderung der Konzentration der Vorläuferkerne für die verzögerten Neutronen der ersten Gruppe, hervorgerufenen durch eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$)	26
Abb. 3-8: Vergleich der Rechenergebnisse für die zeitliche Änderung der Konzentration der Vorläuferkerne für die verzögerten Neutronen der zweiten Gruppe, hervorgerufenen durch eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$)	27
Abb. 3-9: Relativer Fehler der Näherungslösung im Vergleich zur exakten Lösung, für eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$)	27
Abb. 3-10: Vergleich der Rechenergebnisse für die zeitliche Änderung der Neutronenpopulation, hervorgerufenen durch eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.6 \$$)	28
Abb. 3-11: Vergleich der Rechenergebnisse für die zeitliche Änderung der Konzentration der Vorläuferkerne für die verzögerten Neutronen der ersten Gruppe, hervorgerufenen durch eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.6 \$$)	29
Abb. 3-12: Vergleich der Rechenergebnisse für die zeitliche Änderung der Konzentration der Vorläuferkerne für die verzögerten Neutronen der zweiten Gruppe, hervorgerufenen durch eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.6 \$$)	29
Abb. 3-13: Relativer Fehler der Näherungslösung im Vergleich zu exakten Lösung, für eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.6 \$$)	30
Abb. 3-14: exakt berechnete Neutronenpopulation als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.9 \$$) für 2 effektive und für 6 Gruppen verzögerter Neutronen	31
Abb. 3-15: exakt berechnete Neutronenpopulation als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = - 0.5 \$$) für 2 effektive und für 6 Gruppen verzögerter Neutronen	32
Abb. 3-16: Neutronenpopulation als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.9 \$$) für 6 Gruppen verzögerter Neutronen (iterativ berechnet) und 2 effektive Gruppen verzögerter Neutronen (durch die Expansionslösung berechnet)	32
Abb. 3-17: Fehler in der durch die Expansionslösung berechneten Neutronenpopulation mit 2 effektive Gruppen verzögerter Neutronen.....	33
Abb. 4-1: Räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenflusses ϕ als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) für die Näherungslösung der Diffusionsgleichung	49
Abb. 4-2: Räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenstromes j als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) für die Näherungslösung der Diffusionsgleichung	50
Abb. 4-3: Räumliche und zeitliche Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten Gruppe c_1 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) für die Näherungslösung der Diffusionsgleichung	50
Abb. 4-4: Räumliche und zeitliche Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der zweiten Gruppe c_2 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) für die Näherungslösung der Diffusionsgleichung	51
Abb. 4-5: Räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenflusses ϕ als Folge einer prompt kritischen Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$) für die Näherungslösung der Diffusionsgleichung	52

Abb. 4-6: Räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenstromes j als Folge einer prompt kritischen Reaktivitätsstörung ($\rho = 1$ \$) für die Näherungslösung der Diffusionsgleichung.....	52
Abb. 4-7: Räumliche und zeitliche Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten Gruppe c_1 als Folge einer prompt kritischen Reaktivitätsstörung ($\rho = 1$ \$) für die Näherungslösung der Diffusionsgleichung.....	53
Abb. 4-8: Räumliche und zeitliche Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der zweiten Gruppe c_2 als Folge einer prompt kritischen Reaktivitätsstörung ($\rho = 1$ \$) für die Näherungslösung der Diffusionsgleichung.....	53
Abb. 5-1: Räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenflusses ϕ als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3$ \$) für die Näherungslösung der P_1 Transportgleichung	69
Abb. 5-2: Räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenstromes j als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3$ \$) für die Näherungslösung der P_1 Transportgleichung	70
Abb. 5-3: Räumliche und zeitliche Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten Gruppe c_1 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3$ \$) für die Näherungslösung der P_1 Transportgleichung	70
Abb. 5-4: Räumliche und zeitliche Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der zweiten Gruppe c_2 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3$ \$) für die Näherungslösung der P_1 Transportgleichung	71
Abb. 5-5: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung des Neutronenflusses ϕ als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3$ \$) zwischen den Näherungslösungen der P_1 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($f_{trans} - f_{diff}$).....	72
Abb. 5-6: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung des Neutronenstromes j als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3$ \$) zwischen den Näherungslösungen der P_1 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($j_{trans} - j_{diff}$)	72
Abb. 5-7: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten Gruppe c_1 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3$ \$) zwischen den Näherungslösungen der P_1 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($C_{1trans} - C_{1diff}$)	73
Abb. 5-8: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten Gruppe c_2 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3$ \$) zwischen den Näherungslösungen der P_1 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($C_{2trans} - C_{2diff}$)	73
Abb. 5-9: Räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenflusses ϕ als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1$ \$) für die Näherungslösung der P_1 Transportgleichung	74
Abb. 5-10: Räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenstromes j als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1$ \$) für die Näherungslösung der P_1 Transportgleichung	74
Abb. 5-11: Räumliche und zeitliche Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten Gruppe c_1 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1$ \$) für die Näherungslösung der P_1 Transportgleichung	75
Abb. 5-12: Räumliche und zeitliche Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der zweiten Gruppe c_2 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1$ \$) für die Näherungslösung der P_1 Transportgleichung	75
Abb. 5-13: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung des Neutronenflusses ϕ als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1$ \$) zwischen den Näherungslösungen der P_1 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($f_{trans} - f_{diff}$).....	76
Abb. 5-14: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung des Neutronenstromes j als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1$ \$) zwischen den Näherungslösungen der P_1 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($j_{trans} - j_{diff}$)	77
Abb. 5-15: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten Gruppe c_1 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1$ \$) zwischen den Näherungslösungen der P_1 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($C_{1trans} - C_{1diff}$)	77
Abb. 5-16: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der zweiten Gruppe c_2 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1$ \$) zwischen den Näherungslösungen der P_1 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($C_{2trans} - C_{2diff}$)	78
Abb. 6-1: Räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenflusses ϕ als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3$ \$) für die Näherungslösung der P_3 Transportgleichung	97
Abb. 6-2: Räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenstromes j (Neutronenfluss 1. Ordnung) als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3$ \$) für die Näherungslösung der P_3 Transportgleichung ...	97

Abb. 6-3: Räumliche und zeitliche Entwicklung des höheren Neutronenflusses k (Neutronenfluss 2. Ordnung) als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) für die Näherungslösung der P_3 Transportgleichung.....	98
Abb. 6-4: Räumliche und zeitliche Entwicklung des höheren Neutronenflusses l (Neutronenfluss 3. Ordnung) als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) für die Näherungslösung der P_3 Transportgleichung.....	99
Abb. 6-5: Räumliche und zeitliche Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten Gruppe c_1 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) für die Näherungslösung der P_3 Transportgleichung.....	99
Abb. 6-6: Räumliche und zeitliche Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der zweiten Gruppe c_2 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) für die Näherungslösung der P_3 Transportgleichung.....	100
Abb. 6-7: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung des Neutronenflusses ϕ als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) zwischen den Näherungslösungen der P_3 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($f_{trans} - f_{diff}$)	101
Abb. 6-8: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung des Neutronenstromes j als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) zwischen den Näherungslösungen der P_3 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($j_{trans} - j_{diff}$).....	101
Abb. 6-9: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten Gruppe c_1 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) zwischen den Näherungslösungen der P_3 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($C_{1trans} - C_{1diff}$)	102
Abb. 6-10: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der zweiten Gruppe c_2 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) zwischen den Näherungslösungen der P_3 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($C_{2trans} - C_{2diff}$)	103
Abb. 6-11: Räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenflusses ϕ als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$) für die Näherungslösung der P_3 Transportgleichung.....	104
Abb. 6-12: Räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenstrom j als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$) für die Näherungslösung der P_3 Transportgleichung.....	104
Abb. 6-13: Räumliche und zeitliche Entwicklung des höheren Neutronenflusses k (Neutronenfluss 2. Ordnung) als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$) für die Näherungslösung der P_3 Transportgleichung.....	105
Abb. 6-14: Räumliche und zeitliche Entwicklung des höheren Neutronenflusses l (Neutronenfluss 2. Ordnung) als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$) für die Näherungslösung der P_3 Transportgleichung.....	105
Abb. 6-15: Räumliche und zeitliche Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten Gruppe c_1 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$) für die Näherungslösung der P_3 Transportgleichung.....	106
Abb. 6-16: Räumliche und zeitliche Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der zweiten Gruppe c_2 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$) für die Näherungslösung der P_3 Transportgleichung.....	106
Abb. 6-17: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung des Neutronenflusses ϕ als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$) zwischen den Näherungslösungen der P_1 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($f_{trans} - f_{diff}$)	107
Abb. 6-18: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung des Neutronenstromes j als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$) zwischen den Näherungslösungen der P_3 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($j_{trans} - j_{diff}$).....	108
Abb. 6-19: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten Gruppe c_1 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$) zwischen den Näherungslösungen der P_3 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($C_{1trans} - C_{1diff}$)	109
Abb. 6-20: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der zweiten Gruppe c_2 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$) zwischen den Näherungslösungen der P_1 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($C_{2trans} - C_{2diff}$)	109
Abb. 7-1: Vergleich zwischen der mit PARCS und der durch die Expansionslösung bestimmten Leistungsentwicklung für eine positive, globale Störung und reflektierende Randbedingungen.....	113
Abb. 7-2: Zeitliche Veränderung der normierten Verteilung des Neutronenflusses nach einer positiven, globalen Störung, berechnet unter der Voraussetzung reflektierender Randbedingungen	113
Abb. 7-3: Vergleich der durch PARCS und durch die Multiple Scale Expansion berechneten normierten Änderung der Neutronenpopulation für eine positive, globale Störung mit reflektierenden Randbedingungen	114

Abb. 7-4: Vergleich zwischen der mit PARCS, der durch die Expansionslösung und der durch die Punktkinetik bestimmten Leistungsentwicklung für eine positive, lokale Störung	115
Abb. 7-5: Zeitliche Veränderung der normierten Verteilung des Neutronenflusses nach einer positiven, lokalen Störung, berechnet unter der Voraussetzung reflektierender Randbedingungen	116
Abb. 7-6: Vergleich der durch PARCS und durch die Multiple Scale Expansion berechneten normierten Änderung der Neutronenpopulation für eine positive, lokale Störung mit reflektierenden Randbedingungen	117
Abb. 7-7: Vergleich zwischen der mit PARCS und der durch die Expansionslösung bestimmten Leistungsentwicklung für eine negative, globale Störung und reflektierende Randbedingungen	117
Abb. 7-8: Zeitliche Veränderung der normierten Verteilung des Neutronenflusses nach einer negativen, globalen Störung, berechnet unter der Voraussetzung reflektierender Randbedingungen	118
Abb. 7-9: Vergleich der durch PARCS und durch die Multiple Scale Expansion berechneten normierten Änderung der Neutronenpopulation für eine negative, globale Störung mit reflektierenden Randbedingungen	118
Abb. 7-10: Vergleich zwischen der mit PARCS und der durch die Expansionslösung bestimmten Leistungsentwicklung für eine negative, lokale Störung	119
Abb. 7-11: Zeitliche Veränderung der normierten Verteilung des Neutronenflusses nach einer negativen, lokalen Störung, berechnet unter der Voraussetzung reflektierender Randbedingungen	120
Abb. 7-12: Vergleich der durch PARCS und durch die Multiple Scale Expansion berechneten normierten Änderung der Neutronenpopulation für eine negative, lokale Störung mit reflektierenden Randbedingungen	120
Abb. 7-13: Vergleich zwischen der mit PARCS und der durch die Expansionslösung bestimmten Leistungsentwicklung für eine positive, globale Störung in einer eindimensionalen unendlich ausgedehnten Platte	121
Abb. 7-14: Zeitliche Veränderung der normierten Verteilung des Neutronenflusses nach einer positiven, globalen Störung für eine eindimensionale, unendlich ausgedehnte Platte	121
Abb. 7-15: Vergleich der mit PARCS und durch die Multiple Scale Expansion bestimmten zeitlichen Veränderung der normierten Verteilung des Neutronenflusses nach einer positiven, globalen Störung für eine eindimensionale, unendlich ausgedehnte Platte	122
Abb. 8-1: Raum-Zeitverlauf der Änderung des normierten Neutronenflusses für eine lokale, positive Störung im unendlich ausgedehnten System (= Störung 0)	123
Abb. 8-2: Raum-Zeitverlauf der Änderung des normierten Neutronenflusses für zwei lokale, positive Störungen im unendlich ausgedehnten System (Störung 0 und 0)	124
Abb. 8-3: Raum-Zeitverlauf der superpositionierten Näherungslösung der Änderung des normierten Neutronenflusses für zweie lokale, positive Störungen im unendlich ausgedehnten System (Störung 0 + Störung 0)	125
Abb. 8-4: Differenz des Raum-Zeitverlaufs der Änderung des normierten Neutronenflusses aus der exakten Lösung (Störung A und B) und der Näherungslösung (Störung 0 + Störung 0)	125
Abb. 8-5: Vergleich der Leistungsentwicklung für die exakte Lösung (Störung 0 und 0) und die Näherungslösung (Störung 0 + Störung 0)	126
Abb. 8-6: exakter Raum-Zeitverlauf der Änderung des normierten Neutronenflusses für eine lokale, positive Störungen (Störung A)	127
Abb. 8-7: exakter Raum-Zeitverlauf der Änderung des normierten Neutronenflusses für eine lokale, positive Störungen (Störung B)	127
Abb. 8-8: exakter Raum-Zeitverlauf der Änderung des normierten Neutronenflusses für zwei lokale, positive Störungen (Störung A und B)	128
Abb. 8-9: Raum-Zeitverlauf der superpositionierten Näherungslösung der Änderung des normierten Neutronenflusses für zwei lokale, positive Störungen (Störung A + Störung B)	128
Abb. 8-10: Differenz des Raum-Zeitverlaufs der normierten Neutronenflussänderung aus der exakten Lösung (Störung A und B) und der Näherungslösung (Störung A + Störung B)	129
Abb. 8-11: Vergleich der Leistungsentwicklung für die exakte Lösung (Störung A und B) und die Näherungslösung (Störung A + Störung B)	129
Abb. 8-12: exakter Raum-Zeitverlauf der Änderung des normierten Neutronenflusses für vier lokale, positive Störungen (Störung A, B, -A und -B)	130
Abb. 8-13: Raum-Zeitverlauf der superpositionierten Näherungslösung der Änderung des normierten Neutronenflusses für vier lokale, positive Störungen (Störung A + Störung B + Störung -A + Störung -B)	130
Abb. 8-14: Differenz des Raum-Zeitverlaufs der normierten Neutronenflussänderung aus der exakten Lösung (Störung A, B, -A und -B) und der Näherungslösung (Störung A + Störung B + Störung -A + Störung -B)	131
Abb. 8-15: Vergleich der Leistungsentwicklung für die exakte Lösung (Störung A, B, -A und -B) und die Näherungslösung (Störung A + Störung B + Störung -A + Störung -B)	131

1 EINFÜHRUNG

Im Jahre 1939 wurde erstmals öffentlich die Möglichkeit der friedlichen Nutzung der Kernspaltung durch kontrollierte Kettenreaktion beschrieben ^[1]. Siegfried Flügge zeigte in einem Gedankenexperiment das Potential einer sogenannten „Uranmaschine“ zur Energieerzeugung auf:

”...

Die Uranmaschine

Eine derartige „Uranmaschine“, wie ich sie an anderer Stelle eingehend besprochen habe, würde etwa folgendermaßen aussehen: Es werden 4,2 Tonnen Uranoxid mit 56 Gramm Kadmium gut vermischt und das ganze mit 280 Liter Wasser aufgeschlemmt. Eine solche Anordnung sollte, vorbehaltlich der zur Zeit immer noch großen Unsicherheit, mit der alle Zahlenangaben behaftet sind, bei einer Temperatur von 360 Grad Celsius langsam verbrennen. Man könnte etwa daran denken, dass das, bei dieser erhöhten Temperatur, ständig verdampfende Wasser durch eine Berieselung fortlaufend ersetzt wird und der entweichende Wasserdampf zur Speisung einer Dampfmaschine genutzt wird. Die gesamte Energie, die bei dieser Anordnung nach und nach frei wird, reicht etwa aus, um den ganzen Elektrizitätsbedarf des Deutschen Reiches ein Jahr lang zu decken. [...] So ist eine große Schwierigkeit für die Arbeit im Laboratorium, dass man nicht erst Probeversuche mit kleinen Mengen Uran machen kann, sondern gleich mehrere Kubikmeter Uran verarbeiten muß, wobei zu dem immerhin beträchtlichen Preis noch die Explosionsgefahr kommt. Aber selbst nach Überwindung dieser Schwierigkeiten, die gewiß bald gelingen wird, bleibt für die technische Durchführung außerordentlich störend, dass das Uran von Zeit zu Zeit von den entstehenden Spaltungserzeugnissen gereinigt werden muß, da diese selbst wieder Neutronen wegfangen, ohne neue hervorzubringen.

Aber selbst, wenn sich bei genauerem Studium noch herausstellen sollte [...], daß die technische Anwendung der Uranspaltung nicht möglich ist, so liegt doch ein ungeheurer Fortschritt darin, dass man zum ersten Male einen Weg sieht, der [...], es grundsätzlich ermöglicht, die ungeheuren Energievorräte der Atomkerne in den Dienst der Menschheit zu stellen. Es bewährt sich auch hier wieder die alte Erfahrung, dass die wissenschaftliche Forschung, die Jahrzehnte lang in stiller und getreuer Arbeit ihren Weg geht, nicht um materieller Vorteile willen, sondern aus reinem Erkenntnisdrang, dann plötzlich und unerwartet Erkenntnisse abwirft, deren technische Durchbildung sie getrost in die Hand des Ingenieurs legen kann und die geeignet sind, der ganzen Menschheit zum Nutzen zu werden.“ ^[1]

Bereits in diesem frühen Stadium der Entwicklung der kerntechnischen Forschung, die Entdeckung der Kernspaltung lag noch nicht einmal ein Jahr zurück, hat Siegfried Flügge auf die Möglichkeit der elektrischen Energieerzeugung durch Kernspaltung aufmerksam gemacht und das ungeheure Energiepotential, das durch Kernspaltung verfügbar gemacht werden kann, beschrieben. Auch wenn sein Vorschlag für einen Kernreaktor – er nannte ihn Uranmaschine – für heutige Vorstellungen etwas simpel erscheint, so ist doch das Grundschema eines Siedewasserreaktors zu erkennen. Auch die Problemstellungen des Brennstoffkreislaufs, der kritischen Masse und der Leistungskontrolle sind bereits dargestellt, während vor allem die Gefährdung die, sowohl durch Neutronen- als auch durch β - und γ -Strahlung entstünde, noch kein Thema ist. Während dem Vorschlag der Uranmaschine sicherlich einige Handrechnungen vorausgingen, ist heutzutage für Genehmigung und sicheren Betrieb jeglicher Uranmaschine – Kernreaktor die numerische Simulation des Anlagenverhaltens unerlässlich. Zusätzlich sind die von Siegfried Flügge beschriebenen Probleme bei der Laborarbeit, Preis und Explosionsgefahr in Kombination mit der Gefährdung durch Strahlung, immer noch für die sehr hohen Kosten für Experimente im kerntechnischen Bereich verantwortlich. Genau diese Schwierigkeiten im experimentellen Bereich führten schon frühzeitig zu umfangreichen theoretischen Arbeiten zur Berechnung des neutronenphysikalischen Verhaltens kritischer Systeme und machten die Kerntechnik zu einem Pionierbereich für numerische Simulation ^[2]. Heutzutage ist, wie bereits erwähnt, weder eine Betriebsgenehmigung, noch der laufende Betrieb, oder gar eine Weiterentwicklung kerntechnischer Anlagen ohne umfangreiche numerische Simulation, vorstellbar.

„Die Grundlage für die Simulation jeglicher Art von Betriebstransienten und Störfällen in einem Kernreaktor ist die zuverlässige Berechnung des Zeitverlaufes der nuklearen Leistung im Reaktorkern. Die nukleare Leistungserzeugung wird im Allgemeinen aus dem sowohl räumlich als auch zeitlich veränderlichen Neutronenfluss im Reaktorkern berechnet. Der Neutronenfluss im Reaktorkern ist raum-, zeit-, richtungs- und energieabhängig. Er wird durch die Boltzmann-Gleichung (Transportgleichung), die die allgemeine Bewegung von Teilchen, die mit anderen in verschiedenartiger Wechselwirkung stehen, beschrieben.“^[3]

Diese, für die Reaktorphysik grundlegende, Gleichung ist bereits einige Zeit vor der Entdeckung der Kernspaltung für einen anderen Teilbereich der Physik formuliert worden. Ludwig Boltzmann (1844 - 1906) gelang es 1872, von statistischen Betrachtungen Maxwells ausgehend, eine Transportgleichung für ideale Gase aufzustellen die heute allgemein Boltzmann-Gleichung genannt wird^[4].

Da die Lösung der Transportgleichung (Boltzmann-Gleichung) schon in relativ einfachen Fällen mit großem Rechenaufwand verbunden ist werden in der Regel für Reaktoranwendungen, Näherungen verwendet^[5]. Ziel dieser Arbeit soll es sein, eine effektive Näherungslösung für die Transportgleichung, und deren Näherung - die Diffusionsgleichung - zur Simulation des neutronischen Raum-Zeitverhaltens von Kernreaktoren zu ermitteln. Effektive Näherungslösungen bergen nicht nur den Vorteil kürzerer Rechenzeiten und damit einer Kostenersparnis, sie ermöglichen es auch oft den Detaillierungsgrad in anderen Bereichen der Simulation zu erhöhen und damit, bei gleichbleibendem Aufwand an Rechenkapazitäten, die Ergebnisqualität zu verbessern. Im Gegensatz zu den bisherigen, auf Diskretisierung der Zeit beruhenden, Verfahren (siehe nächstes Kapitel) mit der immanenten Limitierung in der Zeitschrittweite, wird eine mehrskalige Näherungslösung (Multiple Scale Expansion) für den gesamten Zeitbereich angestrebt. Die Näherungslösungen sollen auf mehrskaligen Reihenentwicklungen für die Zeitvariable basieren. Aufgrund des steifen Zeitverhaltens des Systems liefern die standardmäßigen Reihenentwicklungen (z. B. Taylor-, Fourier-Reihen) keine verwertbaren Ergebnisse. Die hier angewandte Reihenentwicklung beruht auf einem Multiple Scale Verfahren, in dem einzelne Reihenentwicklungen für verschiedene Zeitskalen miteinander verknüpft werden. Somit wird hier erstmals ein bislang in der Literatur zur Boltzmann-Gleichung für Reaktoranwendungen nicht erwähnter Lösungsansatz zur Behandlung des Zeitdifferentials angewendet um eine Näherungslösung zu entwickeln.

Eine zusätzliche Forderung für die Entwicklung eines Lösungsansatzes ist der Verzicht auf die oft angewandte Trennung von Raum und Zeit, die zur Vernachlässigung von Termen im Zeitablauf der Lösung der Boltzmann-Gleichung führen würde. Im Gegensatz zu den im folgenden Kapitel beschriebenen, bereits bekannten Näherungsverfahren soll deshalb auf ein Lösungsverfahren zurückgegriffen werden, das ohne die Trennung von Raum und Zeit durchführbar ist. Diese Forderung kann für ein homogenisiertes System im Rahmen der Multiple Scale Expansion erfüllt werden. In einem System mit unterschiedlichen Materialkonfigurationen ist eine geschlossene Lösung aber nicht mehr möglich. Hierfür wird ein innovativer Ansatz auf der Basis der Superposition von Störungen in einem homogenisierten System, der zu einer Näherungslösung abseits der bisher verwendeten Grob- und Feinmaschenaufteilung (siehe nächstes Kapitel) führt, beschrieben. Ziel dieses Ansatzes ist die Erfassung der raum-zeitabhängigen Ausbreitung einer Störung. Dies ist notwendig, um die durch die mehrskalige Lösung möglichen vergrößerten Zeitschritte auch für den Fall eines heterogen aufgebauten Systems nutzen zu können.

Die Entwicklung einer Näherungslösung für die hoch komplexe Boltzmann-Gleichung, ohne Trennung von Raum und Zeit, stellt eine mathematische Herausforderung dar. Die Arbeit ist mit der Entwicklung mathematischer Modelle, oder gar nur Lösungsansätzen, keineswegs abgeschlossen. Mathematische Modelle und Lösungsansätze sind aber als wissenschaftliche Grundlage anzusehen und liefern wesentliche Schritte für ingenieurtechnische Weiterentwicklungen von Programmen für die Anwendung in der Reaktorsimulation, dies führt zurück auf das Ende des Eingangszitats von Siegfried Flügge.

2 GRUNDLAGEN

Für die Beschreibung des Zeitverhaltens von Reaktoren werden die Begriffe Kinetik und Dynamik verwendet. Alle Kurzzeitphänomene werden hierbei unter dem Oberbegriff Dynamik zusammengefasst, welcher sich wiederum in die Unterbereiche Kinetik und Dynamik unterteilt. Diese sind folgendermaßen definiert:

- Kinetik:
Kurzzeitverhalten ohne Rückwirkungen
- Dynamik - im eingeschränkten Sinn:
Kurzzeitverhalten mit Rückwirkungen
[6],[7]

Im Rahmen dieser Arbeit soll nur auf kinetische Phänomene eingegangen werden. Denn die Berechnung der kinetischen Phänomene ist die Grundlage für die neutronenphysikalische Simulation des dynamischen Reaktorverhaltens. Die dynamischen Phänomene werden in Simulationsrechnungen als Rückwirkungen z. B. in Folge von Temperatur- oder Dichteänderungen, die im thermohydraulischen Simulationsteil berechnet wurden, in den kinetischen Simulationsteil eingebracht. Die dann folgende Berechnung der Leistungsänderung im neutronenphysikalischen Simulationsteil läuft rein kinetisch ab. Die ermittelte, neutronische Leistungsverteilung wird danach wieder an den thermohydraulischen Simulationsteil übergeben, in dem die Änderung der Temperaturverteilung u. ä. von neuem berechnet wird.

2.1 Die Transportgleichung

Allgemeine Grundlage für die Berechnung der räumlichen und zeitlichen Neutronenflussverteilung im Reaktor ist die Neutronentransportgleichung [7], [8]:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta n(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t)}{\partial t} = & \underbrace{S(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t)}_{\text{externe Neutronenquelle}} + \underbrace{\sum_i \lambda_i C_i(\vec{r}, t) \chi_i(v)}_{\text{Quelle verzögerter Neutronen}} \\
 & - \underbrace{v \vec{\Omega} \nabla n(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t)}_{\text{Leckage}} - \underbrace{\Sigma(\vec{r}, v) v n(\vec{r}, v, \vec{\Omega}, t)}_{\text{Einfang}} \\
 & + \underbrace{\int_v \int_{\vec{\Omega}'} dv' d\vec{\Omega}' (1 - \beta) \chi(v) v(v) \Sigma_f v' n(\vec{r}, v', \vec{\Omega}', t)}_{\text{prompte Neutronen aus der Spaltung}} \\
 & + \underbrace{\int_v \int_{\vec{\Omega}'} dv' d\vec{\Omega}' f(v', \vec{\Omega}' \rightarrow v, \vec{\Omega}) (\Sigma_{in} + \Sigma_{el}) v' n(\vec{r}, v', \vec{\Omega}', t)}_{\text{Einstreuung aus höheren Energiebereichen}}
 \end{aligned}$$

n	Neutronendichte
λ_i	Zerfallskonstante in der i-ten Gruppe
C_i	Dichte der Vorläuferkerne, aus denen verzögerte Neutronen der i-ten Gruppe entstehen
χ_i	Geschwindigkeitsverteilung der Neutronen der i-ten Gruppe
v, v'	Neutronengeschwindigkeit
$\vec{\Omega}, \vec{\Omega}'$	Einheitsvektor der Neutronengeschwindigkeit
Σ	Makroskopischer Wirkungsquerschnitt
β	Zahl der emittierten verzögerten Neutronen pro Zahl der insgesamt erzeugten Neutronen
χ	Energieverteilung der Spaltneutronen
v	Zahl der freigesetzten Neutronen pro Spaltung

Σ_f	Makroskopischer Spaltungsquerschnitt
f	thermische Ausnutzung
Σ_{in}	Makroskopischer Wirkungsquerschnitt für inelastische Streuung
Σ_{el}	Makroskopischer Wirkungsquerschnitt für elastische Streuung
t	Zeit
\vec{r}	Ortsvektor

„Diese Gleichung, die allgemein die Bewegung der Teilchen beschreibt, die mit anderen in verschiedenartiger Wechselwirkung stehen, bezeichnet man als Boltzmann-Gleichung oder Transportgleichung. Sie wurde zuerst im Rahmen der kinetischen Gastheorie entwickelt. Sie gibt in dieser Form zwar einen guten Einblick in die sich physikalisch abspielenden Prozesse, ist aber analytisch nicht lösbar. Wir müssen deshalb Näherungsverfahren anwenden.“^[3]

Zur Behandlung der vier verschiedenen Abhängigkeiten der Transportgleichung werden unterschiedliche Verfahren angewendet:

- **Bewegungsrichtung:**
Die Bewegungsrichtung der Neutronen Ω kann durch verschiedene Ansätze in den Lösungsverfahren behandelt werden. Im Rahmen des Monte Carlo Verfahrens^[9] wird die Bewegungsrichtung der Neutronen kontinuierlich abgebildet, ähnlich auch in den Integralen Transport-Methoden^[10], während im S_N -Verfahren der Raumwinkel in eine diskrete Anzahl Raumrichtungen zerlegt wird^[6]. Im P_N -Verfahren wird die Boltzmann-Gleichung zur Abbildung des Raumwinkels nach den Legendreschen Polynomen, einer Untergruppe der Kugelfunktionen, entwickelt^[3]. Aus den P_N Gleichungen kann schließlich die Diffusionsgleichung entwickelt werden, in der mit über die Richtungsverteilung integrierten Größen gearbeitet wird.
- **Geschwindigkeit:**
Die in der Reaktortechnik meist betrachtete Energieverteilung des Neutronenflusses, hier in der Geschwindigkeit v der Neutronen ausgedrückt, wird ebenfalls durch verschiedene Ansätze behandelt. Im Rahmen des Monte Carlo Verfahrens wird die Energie - Geschwindigkeit des Neutrons - kontinuierlich abgebildet. In den Multigruppen-Verfahren wird die Energie in eine endliche Zahl von Intervallen, die Neutronen werden als Energiegruppen^[3], zugeordnet. Die Anzahl der Energiegruppen wird in der Zweigruppen-Theorie bis zu einer schnellen und einer thermischen reduziert. In der Eingruppen-Theorie wird die Energieverteilung schließlich gar nicht mehr betrachtet.
- **Räumliche Koordinate:**
Zur Behandlung der Abhängigkeit der Raumkoordinate r bieten sich verschiedene Möglichkeiten an. Während im Monte Carlo Verfahren auch die Raumkoordinate kontinuierlich abgebildet wird, wird diese ansonsten in eine Anzahl diskreter Raumbereiche (Maschen) zerlegt. Je nach Anzahl unterscheidet man zwischen Fein- und Grobmaschen, oder nodalen Verfahren. Im Punktmodell wird die räumliche Abhängigkeit vernachlässigt.
- **Zeit:**
Die Zeitabhängigkeit wird aufgrund der, durch die Produktion der verzögerten Neutronen, komplizierten Zeitstruktur grundsätzlich diskretisiert. Die Lösung des diskretisierten Systems kann dann mit Hilfe von Mehrschritt-^[11] oder Einschrittverfahren wie der Theta-Methode (Zusammenfassung des impliziten-, des expliziten- und des Crank-Nicholson-Verfahrens^[12]) erfolgen. In statischen Rechnungen wird die Zeitabhängigkeit schließlich vernachlässigt.

Eine vollnumerische Lösung der Boltzmann-Gleichung für einen komplex aufgebauten Reaktorkern für alle Abhängigkeiten ist selbst mit derzeitig vorhandenen Computerressourcen unwirtschaftlich.

Anfang der 70er Jahre waren selbst für die stationäre Boltzmann-Gleichung kaum vollnumerische Lösungen denkbar, denn die Rechnungen waren nicht in akzeptabler Zeit durchführbar. Aus diesem Grund wurden Vereinfachungen für die Boltzmann-Gleichung eingeführt. In der

Regel ist naheliegend, Vereinfachungen im Sinne der Diffusionstheorie vorzunehmen. „Die Diffusionsgleichung beschreibt die Neutronenbilanz mit den über die Richtungsverteilung integrierten Größen „Flussdichte“ und „Stromdichte“. Sie setzt voraus, dass nur kleine Ströme auftreten und dass die Streuung im Laborsystem isotrop erfolgt.“^[5]

In dieser Zeit wurden aber nicht nur Näherungen für die Berechnung der stationären Lösung der Boltzmanngleichung entwickelt. Aufgrund des wesentlich höheren Rechenaufwandes für instationäre Lösungen war in diesem Bereich der Druck zur Entwicklung von effektiven Näherungslösungen noch wesentlich höher.

In den folgenden Abschnitten werden die wichtigsten Verfahren zur Bestimmung des raumabhängigen, kinetischen Verhalten eines Systems beschrieben. Eine erste Einteilung wurde bereits Mitte der 60er Jahre vorgenommen^[13], diese wurde später verfeinert^[7].

2.2 Finite Differenzen- und Finite Elementeverfahren

Die Finite Differenzen Methode ist das geradlinigste Verfahren zur Lösung der raum-zeit- und energieabhängigen Diffusions- oder Transportgleichung. Hier werden sowohl der zeitliche, als auch der räumliche Differenzialoperator durch die entsprechenden finiten Differenzenquotienten ersetzt.

Der große Vorteil der Finite Differenzen Methode ist, dass für ausreichend kleine Zeit- und Raumschritte eine notwendigerweise korrekte Lösung der zeitabhängigen Multigruppengleichung erzielt wird. Das große Problem ist allerdings, dass die Rechenzeiten für Anwendungen, abgesehen von der Bestimmung von Referenzlösungen, zu lang sind.

Abb. 2-1 illustriert die Finite Differenzen Methode. Jedes Kreuz auf der Grundlinie repräsentiert einen Neutronenflusswert im Raum-Energie Bereich. Bereits für ein zweidimensionales Multigruppenproblem werden typischerweise etwa 20000 Raum-Energie Punkte (z. B. 20 Energiegruppen*40*25 Gitterpunkte) für die Beschreibung Neutronenflusses in Multigruppendarstellung benötigt. In der Finiten Differenzen Methode wird jeder Neutronenflusswert, wie durch die Linien in der Abbildung gezeigt, entlang der Zeitachse von einem Zeitschritt zum nächsten verfolgt. Das bedeutet, dass für jeden Zeitschritt eine komplette Berechnung aller ca. 20000 Raum-Energie-Punkte benötigt wird. Sehr kleine Zeitschritte können notwendig sein, um numerische Instabilitäten zu vermeiden und die gewünschte Genauigkeit zu erreichen. Die Anzahl der Neutronenflusswerte im Raum-Energie-Zeit Bereich wird dadurch sehr groß, was zu hohen Rechenzeiten und hohem Speicherbedarf führt^[7].

Die Entwicklung des Finite Differenzen Verfahrens begann bereits Mitte der 50er Jahre mit der Programmierung von Codes zur Lösung der statischen Diffusionsgleichung^{[14], [15]}. Ende der 60er Jahre folgten dann die ersten Finite Differenzen Codes zur ein- und später zweidimensionalen Lösung der raum-zeitabhängigen Diffusionsgleichung^{[16], [17], [18]}. In dieser Zeit wurden auch grundlegende theoretische Arbeiten zu verschiedenen Zeitschrittverfahren für die Finite-Differenzen Methode veröffentlicht^{[19], [20], [21], [22]}. Eine Übersicht über den Stand der Verfahren Ende der 60er Jahre kann aus den Papieren des Nuclear Energy Symposiums gewonnen werden^{[23], [24]}. Weiterentwicklungen folgten zur Verbesserung der Stabilität des Zeitschrittverhaltens^{[25], [26], [27], [28]} und schließlich zum Übergang von der Diffusionsnäherung zur Lösung der Transportgleichung^{[29], [30], [31]}.

Eine weitere, neuere Entwicklung im Bereich der direkten, numerischen Verfahren ist das Finite Elemente Verfahren für Neutronentransport^{[32], [33], [34]}. Dieses Verfahren wurde für den Bereich Partikel und Strahlungstransport entwickelt, ist inzwischen aber auch für die Reaktoranwendung erweitert worden^[35].

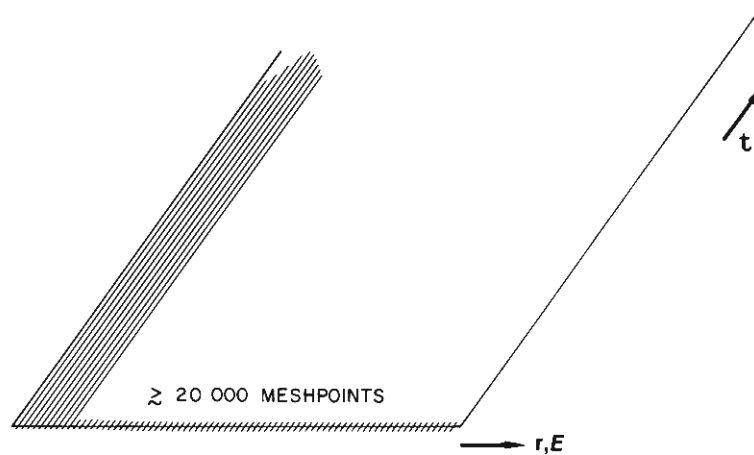


Abb. 2-1: Illustration der Maschenrepräsentation für das Finite Differenzenverfahren

2.3 Punktreaktor Modell

Die immens große Zahl von Rechenoperationen, die für eine Finite Differenzen Lösung eines zwei-, oder dreidimensionalen dynamischen Problems benötigt werden, veranschaulichen die Notwendigkeit einfacherer Methoden, um ökonomisch Routineuntersuchungen durchführen zu können. Die einfachste dieser Methode ist das Punktreaktor Modell. Dieses Modell beruht auf einer Bestimmung der stationären raum- und energieabhängigen Neutronenflussverteilung am Beginn der Transienten. Anschließend wird der Reaktor während des gesamten Rechenvorganges als nulldimensionales System betrachtet und ausschließlich durch die punktkinetischen Gleichungen repräsentiert.

Der große Vorteil des Punktreaktor Modells ist der sehr geringe Rechenaufwand, es muss nur ein System aus gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung gelöst werden. Nachteilig ist, dass bei multiplizierenden Anordnungen mit schwacher neutronischer Koppelung schon schwache lokale Reaktivitätsstörungen zu merklichen Verzerrungen der lokalen Neutronenflussdichte führen. In diesen Fällen sind die Ergebnisse des Punktreaktor Modells nicht nur ungenau sondern normalerweise auch nichtkonservativ.

Abb. 2-2 illustriert das wesentliche Merkmal des Punktreaktor Modells, nämlich die Kondensation der detaillierten Anfangsinformation in eine einzelne integrale Größe, hier durch den Punkt auf der Raum-Energie-Achse dargestellt. Nur dieser einzelne Punkt wird nun, als Pfeil parallel zur Zeitachse dargestellt, über die Zeit verfolgt. Nur diese zeitliche Veränderung der sogenannten Amplitudenfunktion, unter dem Einfluss der zeitlichen Änderung der Reaktivität, wird hier untersucht. Die daraus resultierende Reduzierung der Rechenzeit gegenüber den Finite Differenzenverfahren ist offensichtlich, schließlich muss nur die Zeitabhängigkeit eines Neutronenflusswertes, anstatt der etwa 20000 Werte (siehe vorheriges Beispiel) berechnet werden^[7]. Für die numerische Lösung des zeitabhängigen Differentialgleichungssystems des Punktreaktor Modells wurden verschiedene mathematische Lösungsalgorithmen^{[14], [36]} entwickelt. Heutzutage wird aber vorwiegend der in den 60er Jahren am Argonne National Laboratory von J. J. Kaganove entwickelte Algorithmus verwendet. Das Modell der punktkinetischen Gleichungen wurde einerseits auch für zwei Energiegruppen erweitert^[37] und andererseits durch die Übergangsform zu den Nodalen Lösungsverfahren, die Entwicklung der Theorie gekoppelter Reaktoren^[38] fortgeführt. Eine weitere, verallgemeinerte Entwicklung der punktkinetischen Gleichungen, unter Einbindung einer zeitabhängigen Wichtungsfunktion, wurde Ende der 60er Jahre von M. Becker angedacht, aber später nicht mehr weiterverfolgt^[39].

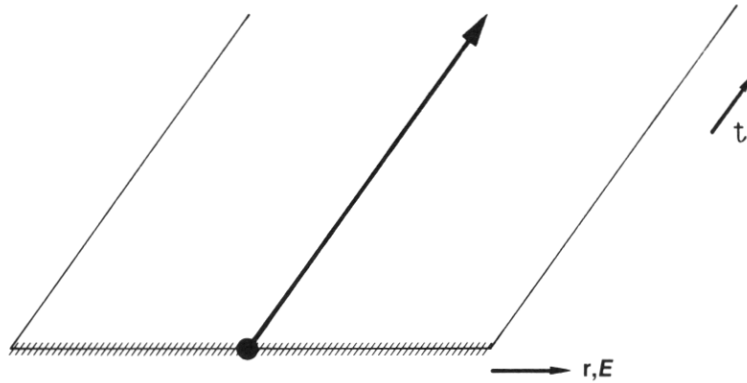


Abb. 2-2: Illustration der Maschenrepräsentation für das Punktreaktor Modell

2.4 Modale Verfahren

Bei den „Modalen“ Verfahren wird die zeitabhängige Neutronenflussdichte aus bereits bekannten Basisfunktionen (Modes) aufgebaut, die nach Maßgabe zeitabhängiger Koeffizienten gemischt werden. Die Modes sind entweder bekannte Neutronenflussverteilungen während der Transiente (Syntheseverfahren), oder sie stellen einen Satz bekannter Eigenfunktionen dar. Erfahrungsgemäß haben sich für die Nachbildung problemangepasste Versuchsfunktionen besser bewährt als die Eigenfunktionen des ungestörten Operators ^[40]. Der einfachste Ansatz besteht in einer Überlagerung der ungestörten Verteilung beim Start der Simulation und der gestörten asymptotischen Verteilung ^[5] am Ende der Simulationszeit.

Der gewünschte Gewinn in der Rechenzeit wird durch die Verwendung einer geringen Anzahl Modes und durch die Berechnung der Modes mit vereinfachten Methoden erreicht, z. B. Lösung des statischen Problems mit verringerter Anzahl der Dimensionen.

Das Hauptproblem ist die Beschreibung der räumlichen Veränderung des Neutronenflusses und nicht die spektrale Veränderung. Für die Beschreibung des Spektrums genügen für Leichtwasserreaktoren zumeist zwei Energiegruppen.

Abb. 2-3 zeigt eine Illustration der einfachsten Form des Modalen Ansatzes - zwei Modes - jeweils in Eingruppennäherung sind auf der Raum-Energie-Achse dargestellt. Die vollkommen positive Kurve (Cosinusfunktion) beschreibt den ungestörten Anfangsneutronenfluss. Der zweite Mode für das gestörte System ist durch eine Sinusfunktion dargestellt. Die beiden Modes werden über die Zeit verfolgt, die Superposition der beiden Modes ermöglicht eine Verschiebung des ungestörten Neutronenflusses hin zum gestörten Neutronenfluss. Der Übergang ist abhängig von einem zeitabhängigen „Mischungskoeffizienten“ ^[7].

Historisch gesehen begann die Entwicklung der Synthesemethode bereits in den 50er Jahren zur Berechnung dreidimensionaler Leistungsverteilungen ^{[41], [42], [43]}. Sie wurde auch noch in den 60er Jahren in diesem Bereich weiterentwickelt ^{[44], [45], [46]} bis zu einer generellen für verschiedene lineare Systeme entwickelten Form ^[47]. Erste Syntheseverfahren zur raumzeitabhängigen Berechnung von Reaktorsystemen wurden bereits kurz nach den statischen, dreidimensionalen Verfahren entwickelt ^{[48], [40], [49]}. Später folgten Syntheseverfahren für die zeitabhängige Multigruppen-Diffusionsgleichung ^[50] und nicht separierbare Transienten ^[51]. In einem weiteren Schritt wurde die Synthesemethode zur numerischen Lösung der Diffusionsgleichung für schnelle Reaktoren erweitert ^{[52], [53]}. Eine Übersicht über die wichtigsten Entwicklungen ist in ^[54] wiedergegeben. Eine weitere Anwendung wurde gegen Mitte der 60er Jahre entwickelt, die Syntheseverfahren zur Lösung des raum-energieabhängigen Systems ^{[55], [56], [57]}.

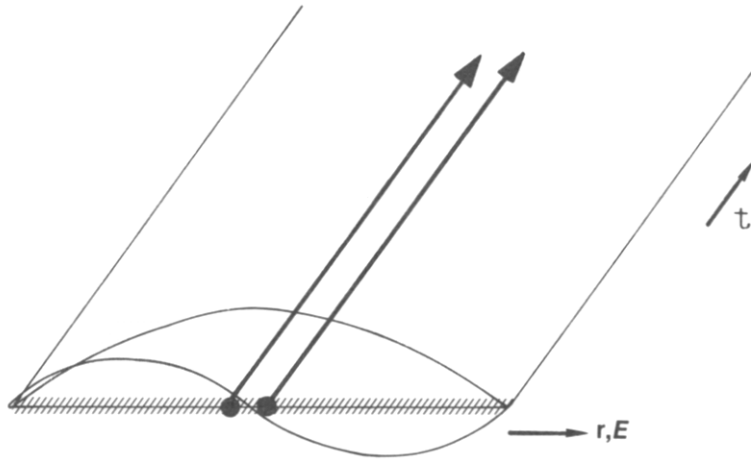


Abb. 2-3: Illustration der Maschenrepräsentation für eine einfache Form des Modalen Verfahrens

2.5 Nodale, oder Grobgitterverfahren

Die konzeptionelle Idee des „Nodalen“ Verfahrens ist die Näherung des zeitabhängigen Neutronenflusses durch eine begrenzte Anzahl, sich nicht überlappenden Teilgebiete in Form einer Reihe räumlicher Unterregionen oder Knoten (Nodes) ^[7]. Ein Beispiel ist die räumliche Diskretisierung in quaderförmige Teilvolumina mit Polynomentwicklung innerhalb dieser Grobmaschen. Hier bietet sich beim Leichtwasserreaktor an, die meist rechteckigen Brennelemente lediglich noch über die Länge in Maschen zu zerteilen. Die Grobmaschenneutronenbilanz kann in diesem Fall, nach einer kleinen Erweiterung ^[58], ähnlich wie im Finiten Differenzenverfahren gelöst werden. Die abhängigen Variablen für die iterative Lösung sind hierbei die Neutronenflussdichten an den Grobgitterpunkten im Zentrum der quaderförmigen Teilvolumina. Das Zeitdifferential wird ebenfalls mit ähnlichen Verfahren wie im Differenzenverfahren behandelt ^[59].

Der Rechenzeitgewinn gegenüber dem Differenzenverfahren entsteht durch die stark verringerte Anzahl der Rechenzellen (Nodes), die für eine zuverlässige Simulation eines Systems notwendig sind. Im Gegenzug ist aber, für detaillierte Rechnungen, eine Neutronenflussrekonstruktion innerhalb der Zellen notwendig.

Das nodale Verfahren für eine einzelne Energiegruppe ist in Abb. 2-4 illustriert. Der räumliche Bereich ist hier nur in zwei Nodes auf der Raum-Energie-Achse unterteilt. Der Neutronenfluss in diesen beiden Nodes wird über die Zeit verfolgt (Pfeil parallel zur Zeitachse). Der, durch die gestrichelte Linie angedeutete, Neutronenaustausch zwischen den benachbarten Zellen führt zu einer Koppelung der beiden nodalen Flussfunktionen. Wenn im Laufe einer Transienten eine Neutronenflussverschiebung entsteht, ergibt sich eine leicht diskontinuierliche Neutronenflussverteilung.

Historisch gesehen, basiert die Entwicklung des nodalen Verfahrens auf der Idee der Kinetik gekoppelter Reaktoren ^{[38], [60], [61]}. Diese Idee wurde kürzlich wieder neu aufgegriffen ^{[62], [63]}. Es existieren inzwischen viele verschiedene Ansätze zur Bestimmung der Austauschterme zwischen den einzelnen Maschen, oder Nodes. Auf einige grundlegende Arbeiten zu den jeweils verschiedenen Lösungsmethoden soll hier verwiesen werden:

- Coarse-Mesh Flux-Expansion Methode ^{[64], [65]}
- Nodal Expansion Methode ^{[66], [67], [68]}
- Analytic Nodal Methode ^{[69], [70]}
- Nodal Collocation Methode ^{[71], [72]}
- Analytic Function Expansion Nodal Methode ^{[73], [74], [75], [76]}
- Variational Nodal Methode ^{[77], [78], [79], [80]}
- Nonlinear Finite Element Methode ^{[81], [82], [83]}
- Nodal Interface Current Methode ^{[84], [85]}
- Variational Synthesis Nodal Discrete Ordinates Methode ^[86]

- Green's Function Nodal Methode ^{[87], [88]}
- Intra Nodal Flux Expansion Methode ^{[89], [90]}

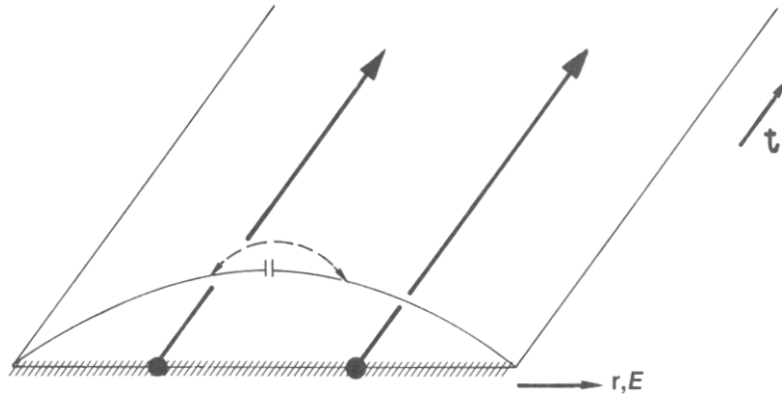


Abb. 2-4: Illustration der Maschenrepräsentation im Nodalen Verfahren mit zwei Nodes; die Koppelung zwischen den Knoten ist durch die gestrichelte Linie symbolisiert

2.6 Faktorisierungsverfahren

Die Verfahren, die formal dem bereits beschriebenen Punktreaktor Modell am Nächsten kommen, basieren auf der Faktorisierung des Neutronenflusses. Zumeist wird der Neutronenfluss in eine rein zeitabhängige Amplitudenfunktion und eine raum-, energie- und nur schwach zeitabhängige Formfunktion zerlegt. Die Neutronenflussfaktorisierung ist formell die Verallgemeinerung der Flussseparation, einer Näherung in der die Formfunktion als in der Zeit konstant angenommen wird (Grundlage des Punkt Reaktor Modells). Nachdem das Faktorisierungsverfahren eine willkürliche Änderung der Formfunktion im Zeitbereich zulässt, ist es formell rigoros, d. h. es ist keine Näherung; das bedeutet, dass die gleiche exakte Lösung wie im Finite Differenzen Verfahren erzielt werden kann. Nachdem die Formfunktion sich im allgemeinen wesentlich langsamer und in geringerem Umfang als die Amplitudenfunktion verändert, ist es zweckmäßig unterschiedliche Zeitschrittweiten für die Berechnung zu verwenden.

Die Rechenzeit kann gegenüber dem Differenzenverfahren drastisch reduziert werden, indem für die Bestimmung der Formfunktion wesentlich größere Zeitschritte gewählt werden, als für die Bestimmung der Amplitudenfunktion. Die Genauigkeit der Ergebnisse hängt aber wesentlich von der Zeitschrittweite für die Berechnung der Formfunktion ab ^[7].

Abb. 2-5 illustriert, repräsentativ für die Faktorisierungsverfahren, das quasistatische Rechenschema. Der Punkt auf der Raum-Energie-Achse deutet die Kondensation der Anfangsinformation an, der Pfeil parallel zur t -Achse bezeichnet die Punktkinetikrechnung für das erste Intervall unter Verwendung der anfänglichen Neutronenflussverteilung (z. B. ungestörte Kosinusverteilung). Der gestrichelte Pfeil deutet die Rückwärtskorrektur der Reaktivität unter Nutzung der soeben berechneten, veränderten Neutronenflussverteilung am Ende des Intervalls. Der zweite durchgezogene Pfeil bezeichnet die modifizierte Punktkinetikrechnung für das Intervall unter Verwendung der nachgerechneten (quasistatischen) Neutronenflussverteilung, der folgende Punkt mit anschließendem Pfeil die Weiterführung des Verfahrens im nächsten Zeitschritt ^[7].

Das sogenannte quasistatische Verfahren wurde in den späten 60er und frühen 70er Jahren am Argonne National Laboratory entwickelt ^[91]. Bis heute ist das Standardverfahren für die Faktorisierung die Trennung von Raum und Zeit. Dieser Ansatz wurde bereits bei der Entwicklung der punktkinetischen Gleichungen zugrunde gelegt. Dieser Ansatz wurde durch den quasistatischen Ansatz ^{[92], [93]}, Multiplikation einer schwach zeitabhängigen Verteilungsfunktion mit einer stark zeitabhängigen Amplitudenfunktion, verfeinert und schließlich zur Improved Quasistatic erweitert ^{[94], [95]}. Die Gültigkeit und Richtigkeit des Faktorisierungsansatzes wurde Ende der

60er Jahre nachgewiesen^[96]. Besonders die Improved Quasistatic Methode wird oft auch mit anderen Verfahren kombiniert verwendet um diese zu beschleunigen, z. B. mit Nodalen Verfahren^[97], dem Variationsverfahren^[98], oder mit S_N Transportlösungen^[99]. Die Faktorisierungsverfahren beschränken sich aber nicht nur auf die quasistatischen Verfahren, es ist auch denkbar das vorhandene System an anderen Stellen zu trennen, z. B. in ein eindimensionales und ein dreidimensionales System^{[100], [102]}.

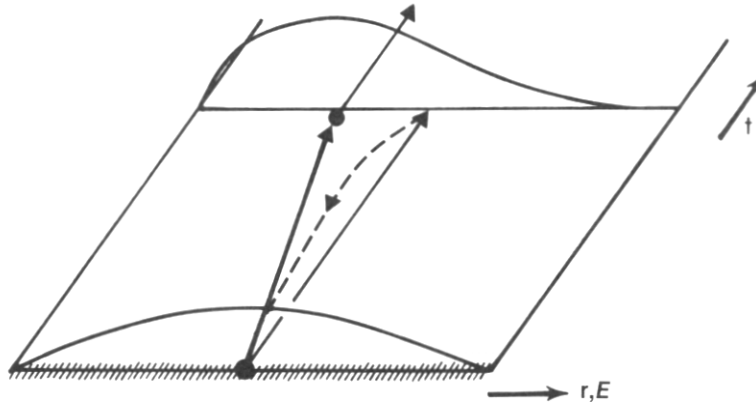


Abb. 2-5: Illustration der Maschenrepräsentation für das Quasistatische Verfahren mit Prediktor – Korrektor Schrittweise

2.7 Anwendung der verschiedenen Verfahren

Für die Simulation des Raum-Zeitverhaltens von Leichtwasserreaktoren wurden bereits in den 70er und 80er Jahren Lösungsverfahren mit vertretbarem Rechenaufwand für das kinetische Verhalten entwickelt. Diese Verfahren beruhen zumeist auf zeitabhängigen Grobmaschen- oder nodalen Verfahren^{[64], [66], [69]} für zwei Energiegruppen, oder deren vereinfachten Version, der eineinhalb Gruppennäherung. Faktorisierungsverfahren sind zur Berechnung von Transienten in schnellen Reaktoren, die durch eine starke Änderung des Neutronenpegels und eine wesentlich schwächere Änderung der Formfunktion charakterisiert sind, eingesetzt worden^[59]. Der Vorteil gegenüber einer vollnumerischen Behandlung der ortsabhängigen Kinetik speist sich hier aus zwei verschiedenen Quellen. Einerseits ist die Neutronengenerationszeit im schnellen Reaktor etwa um den Faktor 1000 kürzer und dadurch auch die mögliche Zeitschrittweite im vollnumerischen Verfahren stark verkürzt. Andererseits reichen für die Berechnung in schnellen Reaktoren die in Druckwasserreaktoren gebräuchlichen zwei Energiegruppen keineswegs aus, sondern es muss mit Multigruppenverfahren gearbeitet werden. Zwischen diesen beiden Extremen befinden sich andere, z. B. epithermische Reaktorsysteme. So ist beispielsweise auch beim „High Performance Light Water Reactor“ (HPLWR) eine Multigruppenrechnung notwendig^[101], wobei sich aber die Neutronengenerationszeit nur geringfügig von bisherigen Leichtwasserreaktoren unterscheidet.

Selbst zu Beginn der 90er Jahre war es aber immer noch Stand der Technik in Störfallanalyseprogrammen für Leichtwasserreaktoren, die Neutronenphysik durch die punktkinetischen Gleichungen zu beschreiben (z. B. RELAP^[103], TRAC^[104], CATHARE^[105], ATHLET^[106]). Dies war auch im Bereich der Entwicklung für die Störfallanalyse in schnellen Reaktoren gegeben (z. B. SAS4A^[107], EAC-2^[108]), wenngleich hier für die Analyse von Kernschmelzunfällen mit ihren massiven Materialumverteilungen schon zu Lösungsverfahren mit zweidimensionaler raum-zeitabhängiger Neutronenphysik gegriffen wurde (SIMMER^[109]). Inzwischen sind hier auch Programmsysteme zur Beschreibung der störfallauslösenden Phase durch eine dreidimensionale, raum-zeitabhängige Neutronenphysik erweitert worden^[110].

In der Leichtwasserreaktortechnik wurden in den 90er Jahren Codes zur Störfallanalyse mit dreidimensionaler, vollnumerischer Kinetik entwickelt (TRAC/NEM)^{[111], [112]}, oder durch die Koppelung bereits vorhandener Systemcodes mit ebenfalls bereits seit vorhandenen Neu-

tronikmodulen geschaffen: z. B. RELAP/PANBOX^{[113], [114]}, RELAP/PARCS^{[115], [116]}, TRAC-M/PARCS^[117], CATHARE/CRONOS^{[118], [119]}, ATHLET/DYN3D^{[120], [121]}, ATHLET-CUBBOX/QUABOX^{[122], [123]}.

2.8 Analytisches Expansionsverfahren

Alle zuvor beschriebenen und verwendeten Verfahren zur Lösung der zeitabhängigen Diffusions- oder Transportgleichung haben ein gemeinsames limitierendes Element, das die Zeitschrittweite begrenzt. Dieses limitierende Element ist das steife Zeitverhalten, das typisch für einen Reaktor mit Produktion verzögerter Neutronen ist. Für die Zeitschrittweite in einem raum-zeitabhängigen System kommt als zusätzliches limitierendes Element die Zeitabhängigkeit der Ausbreitung einer Störung im Neutronenfluss hinzu.

Ein Weg, zur Umgehung des Problems der limitierten Zeitschrittweite, zumindest für den Fall eines homogenisierten Systems, ist die Entwicklung einer analytischen Näherungslösung für das Zeitverhalten des Systems. Gelingt es das Zeitverhalten des Systems in Form einer analytischen Näherungslösung, z. B. durch eine Reihenentwicklung für die Zeitableitung, darzustellen, könnte ein beliebig großer Zeitbereich mit einem Schritt bewältigt werden. Das Limit für die Zeitschrittweite in einer dynamischen Rechnung würde dann durch die Berechnung der Rückwirkungen aus der thermohydraulischen Rechnung gesetzt und nicht mehr, wie bisher durch die kinetischen Rechenschritte, die von der Neutronengenerationszeit abhängig sind.

Das Zeitverhalten eines multiplizierenden Systems mit verzögerten Neutronen wird vorwiegend durch die sehr stark unterschiedlichen Zeitmaßstäbe für die Produktion prompter und verzögerter Neutronen bestimmt. Dies muss auch bei der Entwicklung einer Näherungslösung in Form einer Reihe beachtet werden, die standardmäßig verwendeten Prozeduren (z. B. Taylorentwicklung) versagen in diesem speziellen Fall, die Methoden der regulären Störungstheorie ebenfalls. Diese Methoden sind nicht anwendbar wenn ein asymptotisches System über einen unendlich Zeitbereich gelöst werden soll das gleichzeitig kleine Terme mit einem kumulativen Effekt beinhaltet. Eine prinzipielle Methode zur Entwicklung asymptotischer Lösungen die über einen großen Bereich gültig sind, ist die Multiple Scale Expansion^[124]. Die grundlegenden Arbeiten zu diesem Verfahren stammen wiederum aus den 60er Jahren. Sie entstammen dem Bereich der statistischen Mechanik^{[125], [126]}. Aus diesen Arbeiten wurde später die Method of Extension^{[127], [128]}, oder auch die Two Variable Expansion^{[129], [130], [131]} abgeleitet. Dieses Verfahren wurde dann Ende der 80er Jahre noch einmal erweitert und unter dem Namen Multiple Scale Expansion veröffentlicht^{[132], [124], [133]}. Die unterschiedlichen Skalen für die Reihenentwicklung (Scales) sind für ein multiplizierendes System mit verzögerten Neutronen bereits natürlich vorgegeben. Es sind die Zeitskalen für die Produktion der prompten Neutronen und die Zerfallskonstanten für den Zerfall der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen.

Erste Arbeiten im Bereich der Neutronenphysik unter Anwendung der Multiple Scale Expansion wurden bereits in den 70er Jahren durchgeführt. Damals allerdings zur Lösung der statischen, energieabhängigen Neutronentransportgleichung im inhomogenen Medium^{[134], [135], [136], [137]}.

3 MULTIPLE SCALE EXPANSION DER PUNKTKINETISCHEN GLEICHUNGEN

Ein erster Test, zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit und Durchführbarkeit der „Multiple Scale Expansion“ Methode für die Simulation des typischen, steifen Zeitverhaltens eines multiplizierenden Systems mit Produktion verzögerter Neutronen, wird anhand der punktkinetischen Gleichungen durchgeführt. Dieses System kann selbstverständlich für 1, 2 und 3 Gruppen verzögerter Neutronen auch auf analytischen Weg gelöst werden, somit ist ein direkter Vergleich der durch die Expansionsmethode erzielten Lösungen mit den exakten analytischen Lösungen möglich. Dieser Vergleich wird nach der Entwicklung der analytischen Lösungen im Abschnitt 3.2 durchgeführt und diskutiert.

3.1 Entwicklung der analytischen Näherungsfunktionen

3.1.1 Lösung der punktkinetischen Gleichung mit einer Gruppe verzögerter Neutronen

Als Ausgangsgleichungen für die Multiple Scale Expansion werden die bekannten, punktkinetischen Gleichungen mit n Gruppen verzögerter Neutronen verwendet ^{[7], [138]}.

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} n(t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i(t) \quad (3.1)$$

$$\frac{dC_i}{dt} = \frac{\beta_i}{\Lambda} n(t) - \lambda_i C_i(t), \quad i = 1, \dots, n \quad (3.2)$$

Zuerst werden die exakten Lösungen für die Neutronenpopulation und die Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen für das System mit einer Gruppe verzögerter Neutronen bestimmt. Diese exakten Lösungen werden als Grundlage für die Multiple Scale Expansion für ein System mit 2 Gruppen verzögerter Neutronen verwendet.

Als erster Schritt werden die beiden Gleichungen in die, für die spätere Expansion benötigte, dimensionslose Form umgewandelt.

Die umgewandelten, punktkinetischen Gleichungen für eine Gruppe verzögerter Neutronen in dimensionsloser Schreibweise lauten:

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} - an = \varepsilon c \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = bn - \varepsilon c \quad (3.4)$$

Zur Vereinfachung des Gleichungssystems wurden folgende, zusammenfassende Variablen eingeführt:

für prompte Änderungen im System

$$a = \rho - \beta \quad (3.5)$$

und für den Gesamtanteil der verzögerten Neutronen

$$b = \beta. \quad (3.6)$$

Zusätzlich wird die dimensionslose Zeit τ eingeführt

$$\tau = \frac{t}{\Lambda}. \quad (3.7)$$

Sie liefert für die spätere Multiple Scale Expansion die erste Zeitskala. Der kleine Parameter ε wird als

$$\varepsilon = \lambda \Lambda \quad (3.8)$$

festgelegt. Dieser kleine Parameter definiert - multipliziert mit τ - die zweite, benötigte Zeitskala für die spätere Expansion.

Die exakte Lösung des dimensionslosen Systems, bestehend aus den beiden Differentialgleichungen (3.3) und (3.4), ergibt sich zu:

$$n(\tau) = K_{t1} e^{\frac{1}{2}(a-\varepsilon-sq)\tau} + K_{t2} e^{\frac{1}{2}(a-\varepsilon+sq)\tau} \quad (3.9)$$

$$c(\tau) = \frac{-a-\varepsilon+sq}{2\varepsilon} K_{t1} e^{\frac{1}{2}(a-\varepsilon-sq)\tau} + \frac{-a-\varepsilon+sq}{2\varepsilon} K_{t2} e^{\frac{1}{2}(a-\varepsilon+sq)\tau} \quad (3.10)$$

Die exakte Lösung besteht aus einer Kombination von 2 Exponentialfunktionen, die mit je einer Konstante multipliziert werden. Die Exponenten sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung der entstehenden 2x2 Matrix. Die Konstanten K_{ti} müssen aus den Anfangswerten bestimmt werden. Zur einfacheren Lesbarkeit ist der Quadratwurzelterm der Lösung der quadratischen Gleichung folgendermaßen abgekürzt:

$$sq = \sqrt{a^2 + 2\varepsilon a + \varepsilon^2 + 4b\varepsilon}. \quad (3.11)$$

Die beiden Konstanten K_{t1} und K_{t2} in der Gleichung (3.9) für die Neutronenpopulation n und in der Gleichung (3.10) für die Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen c können unter Verwendung der Anfangswerte n_0 und c_0 zu

$$K_{t1} = \frac{1}{2} \frac{(-a n_0 - \varepsilon n_0 + sq n_0 - 2c_0 \varepsilon)}{sq} \quad (3.12)$$

$$K_{t2} = \frac{1}{2} \frac{(a n_0 + \varepsilon n_0 + sq n_0 + 2c_0 \varepsilon)}{sq} \quad (3.13)$$

berechnet werden. Die benötigten Anfangswerte lauten im Falle eines stationären System:

$$n_0 = 1$$

$$c_0 = \frac{\beta}{\lambda \Lambda}$$

Im Laufe einer dynamischen Rechnung ergeben sich die Startwerte aus dem vorhergehenden Rechenschritt. Nach dieser Bestimmung der exakten analytischen Lösung soll jetzt zur Entwicklung der Expansionslösung übergegangen werden.

3.1.2 Lösung des Systems mit zwei Gruppen verzögerter Neutronen

Für die Multiple Scale Expansion der punktkinetischen Gleichungen mit zwei Gruppen verzögerter Neutronen wird das folgende dimensionslose Differentialgleichungssystem mit 3 Gleichungen verwendet. Die Gleichungen repräsentieren die Neutronenpopulation n und die Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_m .

Die Expansion wird in diesem Fall in drei unterschiedliche Zeitskalen aufgeteilt, die Skala der prompten Neutronengeneration und die Skalen analog der beiden Zerfallskonstanten der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen.

$$\frac{dn}{d\tau} - an = \varepsilon_1 c_1 + \varepsilon_2 c_2 \quad (3.14)$$

$$\frac{dc_m}{d\tau} = b_m n - \varepsilon_m c_m \quad m = 1..2 \quad (3.15)$$

Die kleinen Parameter ε_m werden folgendermaßen festgelegt:

$$\varepsilon_m = \lambda_m \Lambda \quad m = 1..2 \quad (3.16)$$

Die dimensionslose Zeit τ wird analog der eingeführten Definition aus Abschnitt 3.1.1 übernommen (siehe Gleichung (3.7)), die beiden zusätzlich benötigten Zeitskalen ergeben sich aus der Multiplikation der dimensionslosen Zeit τ mit den beiden kleinen Parametern ε_1 und ε_2 .

$$\tau_0 = \tau, \quad \tau_1 = \varepsilon_1 \tau, \quad \tau_2 = \varepsilon_2 \tau \quad (3.17)$$

Die zu expandierenden Variablen, Neutronenpopulation n und die Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_m , werden durch die Expansion in Funktionen der drei Zeitskalen entwickelt.

$$n = n(\tau_0, \tau_1, \tau_2) \quad (3.18)$$

$$c_m = c_m(\tau_0, \tau_1, \tau_2) \quad m = 1..2 \quad (3.19)$$

Zuletzt muss noch der Operator der Zeitableitung $\frac{d}{d\tau}$ in die verwendeten drei Zeitskalen entwickelt werden. Den Ansatz für diese Entwicklung, allerdings nur für zwei Zeitskalen liefert Sandri^[127]. Wird dieser Ansatz für drei Zeitskalen weiterentwickelt, kann der Operator durch folgende Summe ersetzt werden:

$$\frac{d}{d\tau} = \sum_{i=0}^n \frac{d\tau_i}{d\tau} \frac{\partial}{\partial \tau_i} = \frac{\partial}{\partial \tau_0} + \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial \tau_2} + \varepsilon_1^2 \frac{\partial}{\partial \tau_3} + \varepsilon_2^2 \frac{\partial}{\partial \tau_4} + \dots \quad (3.20)$$

Wird die Multiple Scale Expansion des Zeitparameters τ , Gleichung (3.17), nun auf die Variablen Neutronenpopulation n und die Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_m angewendet, so entstehen die folgenden unendlichen Reihen.

$$n = n_0 + \varepsilon_1 n_1 + \varepsilon_2 n_2 + \varepsilon_1^2 n_3 + \dots \quad (3.21)$$

$$c_m = c_{m0} + \varepsilon_1 c_{m1} + \varepsilon_2 c_{m2} + \varepsilon_1^2 c_{m3} + \dots \quad m = 1..2 \quad (3.22)$$

Die Qualität der Näherungslösungen ist davon abhängig, nach welchem Glied die Reihenentwicklung abgebrochen wird.

In den folgenden Schritten gilt es nun, die in den Gleichungen (3.21) und (3.22) eingeführten Koeffizienten n_x , c_{1x} und c_{2x} zu bestimmen.

Im ersten Schritt sind die Gleichungen der Multiple Scale Expansion der 0. Ordnung in ε zu lösen. Diese Gleichungen spiegeln das Systemverhalten aufgrund der prompten Neutronenproduktion wieder.

Die gesamte Gleichung für die Multiple Scale Expansion erhält man durch Einsetzen der Gleichungen (3.21) und (3.22) in die dimensionslosen Ursprungsgleichungen der Punktkinetik (3.14) und (3.15). Zusammengefasst ergeben die Terme 0. Ordnung in ε folgende Gleichungen für die Neutronenpopulation n_0 und die Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_{m0} :

$$\frac{\partial n_0}{\partial \tau_0} - a n_0 = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial c_m}{\partial \tau_0} = b_m n_0 \quad m = 1..2 \quad (3.24)$$

Die Lösungen dieser Differentialgleichungen erster Ordnung geben Information über die Anpassung der prompten Neutronenpopulation n_0 und die Veränderung der Konzentration der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_{10} und c_{20} , die durch eine Störung verursacht werden.

$$n_0 = A_0 e^{a\tau_0} \quad (3.25)$$

$$c_{10} = B_{10} + \frac{b_1}{a} A_0 e^{a\tau_0} \quad (3.26)$$

$$c_{20} = B_{20} + \frac{b_2}{a} A_0 e^{a\tau_0} \quad (3.27)$$

Die Lösungen der Differentialgleichungen bestehen aus einer Kombination von Konstanten und Exponentialfunktionen. Es gilt zu beachten, dass die in den weiteren Rechenschritten zu bestimmenden Konstanten A_0 , B_{10} und B_{20} in τ_0 mit Hilfe der Gleichungen höherer Ordnung in ε und der Anfangswerte ermittelt werden müssen. A_0 , B_{10} und B_{20} sind bisher nur als konstant in Bezug auf τ_0 festgelegt, können aber durchaus Funktionen in Bezug auf τ_1 und τ_2 sein.

Im zweiten Schritt sind die Gleichungen der Multiple Scale Expansion der 1. Ordnung in ε zu lösen. Aus der gesamten Gleichung der Multiple Scale Expansion zusammengefasst ergeben die Terme 1. Ordnung in ε folgende Gleichungen für die Neutronenpopulationen n_1 und n_2 und die Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_{m1} und c_{m2} .

$$\varepsilon_1 \frac{\partial n_1}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial n_2}{\partial \tau_0} + \varepsilon_1 \frac{\partial n_0}{\partial \tau_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial n_0}{\partial \tau_2} - \varepsilon_1 a n_1 - \varepsilon_2 a n_2 = \varepsilon_1 c_{10} + \varepsilon_2 c_{20} \quad (3.28)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial c_{m1}}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial c_{m2}}{\partial \tau_0} + \varepsilon_1 \frac{\partial c_{m0}}{\partial \tau_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial c_{m0}}{\partial \tau_2} = \varepsilon_1 \beta_m n_1 + \varepsilon_2 \beta_m n_2 - \varepsilon_m c_{m0} \quad m = 1..2 \quad (3.29)$$

Die Gleichung (3.28) enthält gegenüber Gleichung (3.23) zusätzlich die Information über die Anpassung der Neutronenpopulationen n_1 und n_2 aufgrund der Produktion verzögerter Neutronen im Zeithorizont τ_1 und τ_2 . Die Gleichungen (3.29) enthalten ebenfalls gegenüber den Gleichungen 0. Ordnung (3.24) die zusätzliche Information über die Veränderung der Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_{m1} und c_{m2} . Die Konzentrationsveränderungen entstehen aufgrund der Produktion von Vorläuferkernen und des Zerfalls von, bereits im Zeithorizont τ_0 produzierten, Vorläuferkernen im Zeithorizont τ_1 und τ_2 .

Durch Einsetzen der im vorherigen Schritt bestimmten Lösungen (3.26), (3.27) und der abgeleiteten Lösung (3.25) erhält man folgende Gleichung für die Neutronenpopulationen n_1 und n_2 :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \frac{\partial n_1}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial n_2}{\partial \tau_0} - \varepsilon_1 a n_1 - \varepsilon_2 a n_2 = \varepsilon_1 B_{10} + \varepsilon_1 \frac{b_1}{a} A_0 e^{a\tau_0} + \varepsilon_2 B_{20} + \varepsilon_2 \frac{b_2}{a} A_0 e^{a\tau_0} \\ - \varepsilon_1 \frac{\partial A_0}{\partial \tau_1} e^{a\tau_0} - \varepsilon_2 \frac{\partial A_0}{\partial \tau_2} e^{a\tau_0} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich eine Bedingung zu Bestimmung der Unbekannten A_0 aus den Gleichungen (3.25), (3.26) und (3.27). Nachdem die Neutronenpopulationen n_1 und n_2 nicht von τ_0 abhängig sein dürfen, ergibt sich folgende Gleichung zur Bestimmung von A_0 .

$$\varepsilon_1 \left(\frac{\partial A_0}{\partial \tau_1} - \frac{b_1}{a} A_0 \right) + \varepsilon_2 \left(\frac{\partial A_0}{\partial \tau_2} - \frac{b_2}{a} A_0 \right) = 0 \quad (3.31)$$

Die Lösung dieser Gleichung definiert A_0 als Funktion der Zeitskalen τ_1 und τ_2 .

$$A_0 = D_0 e^{\frac{b_1}{a} \tau_1 + \frac{b_2}{a} \tau_2} \quad (3.32)$$

Diese Funktion enthält Information über die Auswirkung der Produktion verzögerter Neutronen auf die Anpassung des Systems im kurzen Zeithorizont, dem Zeitbereich des sogenannten „Prompt Jump“ und verknüpft damit die verschiedenen Reihenentwicklungen.

Der Bedingung zur Bestimmung von A_0 folgend, reduziert sich Gleichung (3.30) zu:

$$\varepsilon_1 \frac{\partial n_1}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial n_2}{\partial \tau_0} - \varepsilon_1 a n_1 - \varepsilon_2 a n_2 = \varepsilon_1 B_{10} + \varepsilon_2 B_{20} \quad (3.33)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ergibt folgende Ergebnisse für die Neutronenpopulationen n_1 und n_2 :

$$n_1 = A_1 e^{a\tau_0} - \frac{1}{a} B_{10} \quad (3.34)$$

$$n_2 = A_2 e^{a\tau_0} - \frac{1}{a} B_{20}. \quad (3.35)$$

Unter Verwendung der Ergebnisse für n_1 und n_2 , Gl. (3.34), (3.35), der Ergebnisse (3.26) und (3.27) und der abgeleiteten Ergebnisse (3.26) und (3.27) entstehen aus (3.29) die folgenden Gleichungen zur Bestimmung der Veränderung der Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_{m1} und c_{m2} .

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \frac{\partial c_{11}}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial c_{12}}{\partial \tau_0} &= \varepsilon_1 \beta_1 A_1 e^{a\tau_0} - \varepsilon_1 \alpha_1 B_{10} + \varepsilon_2 \beta_1 A_2 e^{a\tau_0} - \varepsilon_2 \alpha_1 B_{20} - \varepsilon_1 B_{10} \\ &\quad + \varepsilon_1 \alpha_1 D_0 e^{\frac{b_1}{a}\tau_1 + \frac{b_2}{a}\tau_2} e^{a\tau_0} - \varepsilon_1 \frac{\partial B_{10}}{\partial \tau_1} - \varepsilon_1 \alpha_1^2 D_0 e^{\frac{b_1}{a}\tau_1 + \frac{b_2}{a}\tau_2} e^{a\tau_0} \\ &\quad - \varepsilon_2 \frac{\partial B_{10}}{\partial \tau_2} - \varepsilon_1 \alpha_1 \alpha_2 D_0 e^{\frac{b_1}{a}\tau_1 + \frac{b_2}{a}\tau_2} e^{a\tau_0} \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \frac{\partial c_{21}}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial c_{22}}{\partial \tau_0} &= \varepsilon_1 \beta_2 A_1 e^{a\tau_0} - \varepsilon_1 \alpha_2 B_{10} + \varepsilon_2 \beta_2 A_2 e^{a\tau_0} - \varepsilon_2 \alpha_2 B_{20} - \varepsilon_2 B_{20} \\ &\quad + \varepsilon_2 \alpha_2 D_0 e^{\frac{b_1}{a}\tau_1 + \frac{b_2}{a}\tau_2} e^{a\tau_0} - \varepsilon_2 \frac{\partial B_{20}}{\partial \tau_2} - \varepsilon_2 \alpha_2^2 D_0 e^{\frac{b_1}{a}\tau_1 + \frac{b_2}{a}\tau_2} e^{a\tau_0} \\ &\quad - \varepsilon_1 \frac{\partial B_{20}}{\partial \tau_1} - \varepsilon_2 \alpha_2 \alpha_1 D_0 e^{\frac{b_1}{a}\tau_1 + \frac{b_2}{a}\tau_2} e^{a\tau_0} \end{aligned} \quad (3.37)$$

Zur Vereinfachung sind hier die Variablen

$$\alpha_m = \frac{b_m}{a} \quad m = 1..2 \quad (3.38)$$

eingeführt.

Die Gleichungen (3.36) und (3.37) liefern wiederum die Bedingungen zur Bestimmung der Variablen B_{10} und B_{20} , die Konstanten in τ_0 aber Funktionen in τ_1 und τ_2 sein können. Nachdem die Gleichungen der 1. Ordnung von ε nicht von τ_0 abhängig sein dürfen, ergibt sich folgendes Gleichungssystem zur Bestimmung von B_{10} und B_{20} .

$$\varepsilon_1 \frac{\partial B_{10}}{\partial \tau_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial B_{10}}{\partial \tau_2} + \varepsilon_1 \alpha_1 B_{10} + \varepsilon_1 B_{10} = -\varepsilon_2 \alpha_1 B_{20} \quad (3.39)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial B_{20}}{\partial \tau_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial B_{20}}{\partial \tau_2} + \varepsilon_2 \alpha_2 B_{20} + \varepsilon_2 B_{20} = -\varepsilon_1 \alpha_2 B_{10} \quad (3.40)$$

Dieses partielle Differentialgleichungssystem könnte nun ein weiteres Mal durch eine Multiple Scale Expansion gelöst werden. Da es sich bei diesem System aber nicht um ein steifes Problem handelt und da eine exakte Lösung aber problemlos zu erzielen ist, wird dieses Verfahren hier bevorzugt. Die exakte Lösung dieses partiellen Differentialgleichungssystems besteht wiederum aus einer Kombination von zwei Konstanten und zwei Exponentialfunktionen.

$$B_{10} = K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1+(\alpha_2+1)\varepsilon_2-sr]\tau} + K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1+(\alpha_2+1)\varepsilon_2+sr]\tau} \quad (3.41)$$

$$B_{20} = -\frac{a}{2} \frac{(\alpha_1+1)\varepsilon_1 - (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr}{\varepsilon_2 b_1} K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1+(\alpha_2+1)\varepsilon_2-sr]\tau} - \frac{a}{2} \frac{(\alpha_1+1)\varepsilon_1 - (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr}{2\varepsilon_2 b_1} K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1+(\alpha_2+1)\varepsilon_2+sr]\tau} \quad (3.42)$$

Zur Vereinfachung ist hier als Abkürzung für den Quadratwurzelterm

$$sr = \sqrt{\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_2\alpha_2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_1^2\alpha_1 + \varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_2^2\alpha_2 - 2\varepsilon_2\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2^2\alpha_2^2 + 2\varepsilon_2\alpha_1\varepsilon_1\alpha_2 + \varepsilon_1^2\alpha_1^2} \quad (3.43)$$

eingeführt.

An dieser Stelle wird die Expansion abgebrochen, denn die ermittelten Exponenten sind ausreichend präzise für eine Nährlösung 1. Ordnung für das punktkinetische System. In den höheren Ordnungen sind für die Entwicklung keine mehrskaligen Informationen mehr vorhanden, deshalb würden weitere Schritte nur noch zur Verbesserung der Reihenentwicklung an sich führen, dies ist aber in anderer Weise einfacher zu erreichen. Die benötigten Konstanten K_{B1} und K_{B2} müssen mit Hilfe der Anfangsbedingungen bestimmt werden.

Die Gesamtlösung für die Neutronenpopulation n kann Gleichung (3.21) folgend aus den einzelnen Lösungen zusammengesetzt werden. Die Neutronenpopulation in der Zeitskala der prompten Neutronenproduktion n_0 ergibt sich aus den Gleichungen (3.25) und (3.32). Die Neutronenpopulation in der Zeitskala des Zerfalls der Vorläuferkerne der ersten Gruppe verzögerter Neutronen n_1 ergibt sich aus den Gleichungen (3.34) und (3.41). Die Neutronenpopulation in der Zeitskala des Zerfalls der Vorläuferkerne der zweiten Gruppe verzögerter Neutronen n_2 ergibt sich aus den Gleichungen (3.35) und (3.42). Werden diese Gleichungen alle zusammengefügt, ergibt sich für die gesamte Neutronenpopulation:

$$\begin{aligned} n = n_0 + \varepsilon_1 n_1 + \varepsilon_2 n_2 = D_0 e^{\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2} e^{a\tau_0} &+ \varepsilon_1 A_1 e^{a\tau_0} - \varepsilon_1 \frac{1}{a} \left(K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1+(\alpha_2+1)\varepsilon_2-sr]\tau} + K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1+(\alpha_2+1)\varepsilon_2+sr]\tau} \right) \\ &+ \varepsilon_2 A_2 e^{a\tau_0} + \varepsilon_2 \frac{1}{2} \frac{(\alpha_1+1)\varepsilon_1 - (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr}{\varepsilon_2 b_1} K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1+(\alpha_2+1)\varepsilon_2-sr]\tau} \\ &+ \varepsilon_2 \frac{1}{2} \frac{(\alpha_1+1)\varepsilon_1 - (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr}{\varepsilon_2 b_1} K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1+(\alpha_2+1)\varepsilon_2+sr]\tau} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Die Gesamtlösung für die Konzentration der Vorläuferkerne c_1 und c_2 der beiden Gruppen der verzögerten Neutronen ergibt sich aus der Kombination der Gleichungen (3.26), (3.32) und (3.41) für die erste Gruppe und aus (3.27), (3.32) und (3.42) für die zweite Gruppe verzögerter Neutronen.

$$\begin{aligned} c_1 = c_{10} &= K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1+(\alpha_2+1)\varepsilon_2-sr]\tau} + K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1+(\alpha_2+1)\varepsilon_2+sr]\tau} + \frac{b_1}{a} D_0 e^{\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2} e^{a\tau_0} \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned}
 c_2 &= c_{20} \\
 &= -\frac{a}{2} \frac{(\alpha_1 + 1)\varepsilon_1 - (\alpha_2 + 1)\varepsilon_2 + sr}{\varepsilon_2 b_1} K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1 + 1)\varepsilon_1 + (\alpha_2 + 1)\varepsilon_2 - sr]\tau} \\
 &\quad - \frac{a}{2} \frac{(\alpha_1 + 1)\varepsilon_1 - (\alpha_2 + 1)\varepsilon_2 + sr}{\varepsilon_2 b_1} K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1 + 1)\varepsilon_1 + (\alpha_2 + 1)\varepsilon_2 + sr]\tau} + \frac{b_2}{a} D_0 e^{\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2} e^{a \tau_0}
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

Um eine sehr gute Ergebnisqualität zu erzielen, obwohl die Expansion bereits nach den Gliedern 1. Ordnung abgebrochen wurde, müssen die bereits angesprochenen Korrekturen eingeführt, die Singularität behandelt und die Konstanten bestimmt werden.

Für $a = 0$ gehen beide α_m gegen unendlich. Der Fall $a = 0$ tritt für $\rho = \beta$ auf. Dieser Fall wird in der Reaktortechnik als prompt kritisch bezeichnet. Die exakte Lösung aus der Exponentialfunktion für das System mit einer Gruppe verzögerter Neutronen (Gl.(3.9)) wird hier als Startpunkt für die Verbesserung der Lösung herangezogen. Als Exponent für den Term der die Entwicklung im Zeithorizont der prompten Neutronenproduktion festlegt, wird anstatt der gerade hergeleiteten Exponentialfunktionen $e^{\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2} e^{a \tau_0}$ die Exponentialfunktion aus der exakten Lösung

$e^{\frac{1}{2}(\rho - \beta - \varepsilon - sq)\tau_0}$ verwendet (in den Gleichungen (3.44), (3.45) und (3.46)). Dieser Term fließt damit auch in die weitere Entwicklung der Exponenten für die Konzentrationen der Vorläuferkerne ein und führt dort zu einer deutlichen Verbesserung des Ergebnisses. Die Variable a wird hier folgendermaßen ersetzt:

$$a = \frac{1}{2}(\rho - \beta - \varepsilon - sq) \tag{3.47}$$

Diese Änderung beseitigt nicht nur die Singularität, sondern verbessert gleichzeitig die Qualität der gesamten Näherung in der Umgebung der singulären Stelle.

Als kleiner Parameter ε wird für die Berechnung des Exponenten der exakten Lösung mit einer Gruppe verzögerter Neutronen ein gemittelter Wert benötigt. Dieser wird folgendermaßen festgelegt:

$$\varepsilon = \frac{\sum_i \lambda_i \beta_i}{\sum_i \beta_i} \Lambda \quad i = 1 \dots n \tag{3.48}$$

Eine zusätzliche Korrektur muss eingeführt werden, um die Überbewertung die durch die Verwendung der Gleichung (3.47) für die Berechnung der Exponenten der verzögerten Neutronen Produktion entsteht zu kompensieren.

$$\alpha_m = \frac{b_m}{a + \varepsilon_m} \quad m = 1 \dots 2 \tag{3.49}$$

Ohne diese zusätzliche Korrektur würde die Produktion der Vorläuferkerne überschätzt werden, weil sich eine Wechselwirkung zwischen dem Korrekturterm und beiden Entwicklungen ergibt.

Die Konstanten A_m , D_0 , K_{B1} und K_{B2} werden wie folgt mit Hilfe der Anfangsbedingungen n_0 , c_{0m} bestimmt:

$$A_1 = A_2 = 0 \tag{3.50}$$

$$D_0 = \frac{1 - a n_0 - \varepsilon n_0 + s q n_0 - 2(c_1 \varepsilon_1 + c_2 \varepsilon_2)}{2 s q} \quad (3.51)$$

$$K_{B1} = \frac{-2 a n_0 b_1 + 2 D_0 a b_1 - 2 \varepsilon_1 K_{B2} b_1 + K_{B2} a \varepsilon_1 (\alpha_1 + 1) - K_{B2} a \varepsilon_2 (\alpha_2 + 1) - K_{B2} a s r}{2 \varepsilon_1 b_1 - a \varepsilon_1 (\alpha_1 + 1) + a \varepsilon_2 (\alpha_2 + 1) - a s r} \quad (3.52)$$

$$K_{B2} = -\frac{1}{2} \frac{(\varepsilon_2 (\alpha_2 + 1) - \varepsilon_1 (\alpha_1 + 1)) C_{01} - s r c_{01} - 2 c_{02} \frac{b_1}{a} \varepsilon_2}{s r}. \quad (3.53)$$

Die Anfangsbedingungen definieren sich entweder im Laufe einer dynamischen Rechnung aus den Ergebnissen des vorhergehenden Rechenschrittes, oder können für den Beginn einer Rechnung aus dem stationären Zustand folgendermaßen hergeleitet, bzw. definiert werden:

$$n_0 = 1 \text{ für } t=0$$

$$c_{0m} = \frac{\beta_m}{\lambda_m \Lambda} \text{ für } t=0 \quad m = 1..2$$

3.2 Testrechnungen

In den ersten Testrechnungen für die Näherungslösung der punktkinetischen Gleichungen gilt es folgende drei Aspekte zu klären: Ist die Multiple Scale Expansion zur Entwicklung einer Näherungslösung geeignet, können Ergebnisse mit zufriedenstellender Genauigkeit erreicht werden, kann das standardmäßig verwendete System mit 6 Gruppen verzögerter auf eine Näherung mit 2 Gruppen verzögerter Neutronen reduziert werden? Diese Fragen sollen anhand von Testrechnungen für ein willkürlich festgelegtes Testsystem untersucht werden. Die verwendeten Konstanten sind nicht repräsentativ für irgend ein Reaktorsystem, sondern wurden so gewählt, dass alle wichtigen Effekte deutlich sichtbar werden, deutlicher als das für Werte bestehender Reaktorsysteme der Fall wäre.

Alle Testrechnungen starten vom stationären Zustand aus, die Konstanten sind folgendermaßen festgelegt worden:

effektiver Anteil verzögerter Neutronen (1. Gruppe)	β_1	$= 4.277 \cdot 10^{-03}$
effektiver Anteil verzögerter Neutronen (2. Gruppe)	β_2	$= 3.223 \cdot 10^{-03}$
gesamter effektiver Anteil verzögerter Neutronen	β	$= 7.50 \cdot 10^{-03}$
Lebensdauer der prompten Neutronen	Λ	$= 1.0 \cdot 10^{-06} \text{ s}$
effektive Zerfallskonstante der Vorläuferkerne (1. Gruppe)	λ_1	$= 2.926 \text{ s}^{-1}$
effektive Zerfallskonstante der Vorläuferkerne (2. Gruppe)	λ_2	$= 0.02613 \text{ s}^{-1}$
gemittelte effektive Zerfallskonstante der Vorläuferkerne	λ	$= 1.680 \text{ s}^{-1}$

3.2.1 Anwendbarkeit des Entwicklungsverfahrens

Bereits im Rahmen der Entwicklung der analytischen Näherungsfunktionen ist absehbar, dass die Multiple Scale Expansion das steife Zeitverhalten eines multiplizierenden Systems mit verzögerten Neutronen abbilden kann. Das zweigeteilte Zeitverhalten besteht aus dem Prompt Jump gefolgt von einem langsamen exponentiellen Anstieg der Neutronenpopulation. Eine erste Testrechnung, die in Abb. 3-1 dargestellt ist, bestätigt die Anwendbarkeit des Expansionsverfahrens für die punktkinetische Gleichung. Alle vier Rechenergebnisse bilden das qualitative Verhalten des Systems, das durch die positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.9 \text{ \$}$) hervorgerufen wird, gut ab. Alle vier Kurven zeigen das für einen Kernreaktor mit verzögerter Neutronenproduktion typische, zweigeteilte Zeitverhalten. Am Beginn der Störung ($t < 0.01 \text{ s}$) ist der so ge-

nannte „Prompt Jump“ deutlich zu sehen, ein sprunghafter Anstieg der Neutronenpopulation, der durch die sehr kurze Generationszeit der prompten Neutronen bedingt ist. Diese Reaktion kann, für nicht prompt kritische Störungen ($\rho < 1 \$$), durch die „Prompt Jump Approximation“ relativ gut angenähert werden ^{[7], [138]}. Die Zeitdauer des Prompt Jump ist von der Lebensdauer der prompten Neutronen abhängig und beträgt hier in diesem Testsystem etwa 0.0075 s. Die Neutronenpopulation springt in dieser kurzen Zeitspanne auf etwa den zehnfachen Wert der stationären Neutronenpopulation. Dieser Wert kann auch durch die Prompt Jump Näherung verifiziert werden.

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\beta - \rho_1}{\beta - \rho_2} = \frac{0.0075}{(1 - 0.9) \cdot 0.0075} = 10$$

Dem Prompt Jump folgt ein wesentlich langsamerer exponentieller Anstieg der Neutronenpopulation. Dieser Anstieg ist durch die Entstehung zusätzlicher verzögerter Neutronen bedingt und ist abhängig von der Zerfallskonstante λ der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen. Auch dieses Verhalten kann durch eine Näherung beschrieben werden. Die sogenannte „Precursor Accumulation Approximation“ ^[7] ist allerdings nicht mehr sehr gebräuchlich da inzwischen selbst für schnelle Abschätzungen problemlos die punktkinetischen Gleichungen mit einer, oder mehreren Gruppen verzögerter Neutronen berechnet werden können. Eine genäherte Lösung für kleine Störungen und eine Gruppe verzögerter Neutronen ist in Reaktorhandbüchern abgedruckt ^[138] und liefert bei einer guten Mittelung der Zerfallskonstante der Vorläuferkerne annehmbare Ergebnisse für kurze Zeiten.

Die Ergebnisse von drei verschiedenen Näherungen (Punktkinetik mit einer Gruppe verzögerter Neutronen und die Näherung durch Multiple Scale Expansion für 2 Gruppen verzögerter Neutronen mit und ohne die eingeführten Verbesserungen) sind der exakten Lösung mit zwei Gruppen verzögerter Neutronen in Abb. 3-1 gegenübergestellt. Alle Lösungen sind mit der Mathematiksoftware MAPLE 8[®] berechnet und visualisiert.

Die einfachste Näherung, die exakte Lösung für eine Gruppe verzögerter Neutronen stimmt für kurze Zeiten sehr gut mit der exakten Lösung überein. Die signifikante Abweichung die sich für längere Zeiten ergibt ist durch die Darstellung der gesamten verzögerten Neutronenproduktion durch lediglich eine einzelne Exponentialfunktion zurückzuführen. Die Einführung einer zweiten Gruppe verzögerter Neutronen durch die Multiple Scale Expansion verbessert das Ergebnis auch für längere Zeitspannen. Die sichtbare Abweichung ist durch die starke Störung ($\rho = 0.9 \$$) die relativ Nahe an der singulären Stelle ($\rho = 1 \$$) liegt zu erklären. Die analytische Näherungslösung kann aber durch die Einführung der zuvor beschriebenen Korrekturen (Gl. (3.47) und (3.49)) deutlich verbessert werden. Diese verbesserte Expansionslösung zeigt eine sehr gute Übereinstimmung mit der exakten Lösung über den gesamten betrachteten Zeitbereich.

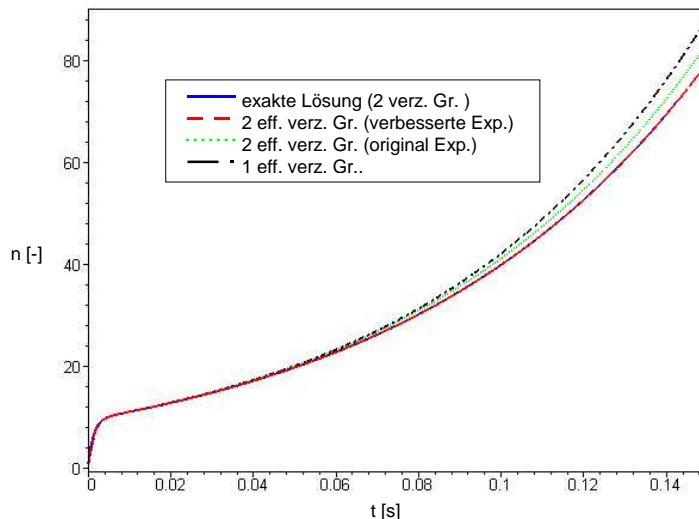


Abb. 3-1: Vergleich der Rechenergebnisse für die zeitliche Änderung der Neutronenpopulation, hervorgerufen durch eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.9 \$$)

Die Einführung der verbesserten Lösung für die Multiple Scale Expansion für ein System mit 2 Gruppen verzögerter Neutronen führt zum nächsten Abschnitt, in dem die Genauigkeit der Näherungslösung für verschiedene Störungen untersucht wird.

3.2.2 Genauigkeit der Näherungslösung

Die verbesserte Version der Multiple Scale Expansion zeigt exzellente Übereinstimmung mit den exakten Ergebnissen für die Neutronenpopulation für verschiedene Arten von Störungen, auch in der Umgebung der singulären Stelle, die in den Funktionen der originären Multiple Scale Expansion auftritt. Abb. 3-2, Abb. 3-3, Abb. 3-4 und Abb. 3-5 zeigen die sehr gute Übereinstimmung von Näherungslösung und exakter Lösung sowohl für positive als auch für negative Reaktivitätsstörungen. Die exakten Ergebnisse für eine Gruppe verzögerter Neutronen sind in diesen Abbildungen ebenfalls mit eingefügt, sind aber jeweils nur für sehr kurze Zeiträume als Näherung für das System mit 2 Gruppen verzögerter Neutronen brauchbar. Für längere Zeiträume ist eine Näherungslösung mit 2 Gruppen verzögerter Neutronen unerlässlich, um gute Übereinstimmung zu erzielen.

Eine negative Reaktivitätsstörung ($\rho = -0.3 \$$) wie in Abb. 3-2 führt ebenfalls zuerst zu einem Prompt Jump - allerdings in negativer Richtung - über den längeren Zeitraum wird das Verhalten des Systems dann von den Zerfallskonstanten der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen bestimmt. Auch hier ist ein deutlicher Unterschied zwischen den Rechnungen mit einer und mit zwei Gruppen verzögerter Neutronen für längere Zeitspannen zu sehen.

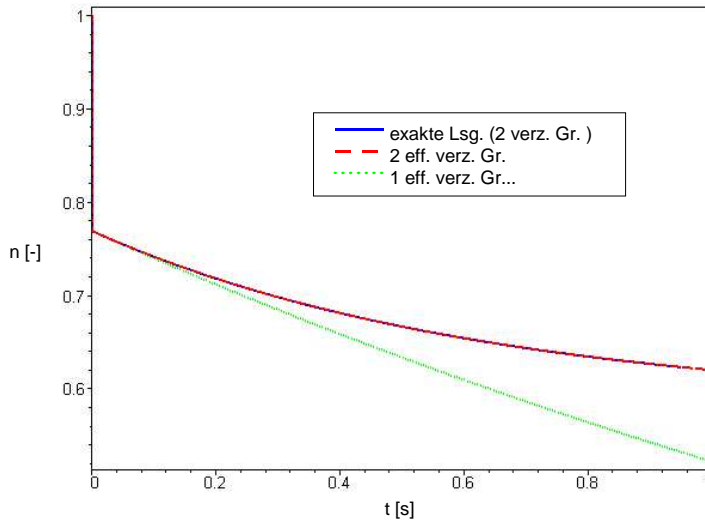


Abb. 3-2: Vergleich der Rechenergebnisse für die zeitliche Änderung der Neutronenpopulation, hervorgerufenen durch eine negative Reaktivitätsstörung ($\rho = - 0.3 \$$)

Für den Fall der begrenzten positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) in Abb. 3-3 entsteht ein interessanter Effekt. Der starke Einfluss der zweiten Gruppe verzögerter Neutronen führt hier dazu, dass ein exponentieller Anstieg der Neutronenpopulation erst nach relativ langer Zeit (> 1 s) einsetzt. Dieses Verhalten kann natürlich mit nur einer Gruppe verzögerter Neutronen keinesfalls wiedergegeben werden, wird aber durch die Näherungslösung mit 2 Gruppen verzögerter Neutronen auch exzellent abgebildet.

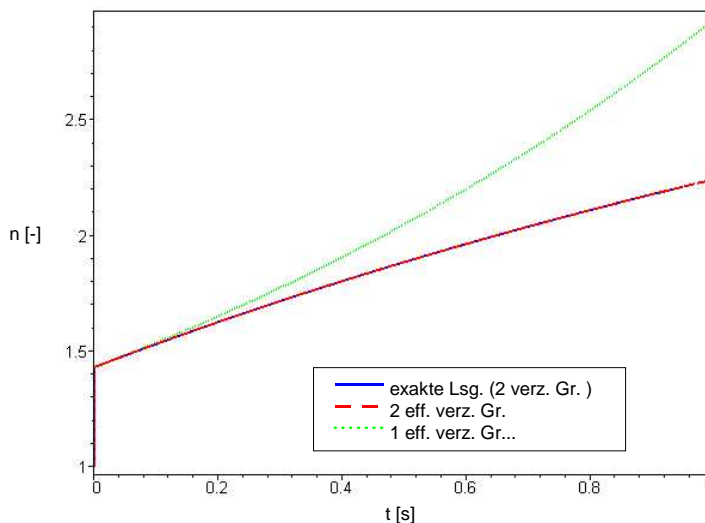


Abb. 3-3: Vergleich der Rechenergebnisse für die zeitliche Änderung der Neutronenpopulation, hervorgerufenen durch eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$)

Die Qualität der Näherung mit einer Gruppe verzögerter Neutronen verbessert sich, je stärker die Reaktivitätsstörung wird (vgl. Abb. 3-4 und Abb. 3-1). Dies kann durch den verminderten Einfluss der verzögerten Neutronen bei großen Reaktivitätsstörungen nahe prompt kritisch erklärt werden. Das Zeitverhalten der Neutronenpopulation wird hier schon deutlich von der prompten Neutronenproduktion bestimmt. Im Vergleich zwischen der Lösung für eine Gruppe und der durch Multiple Scale Expansion entwickelten Näherung für zwei Gruppen verzögerter Neutronen zeigt sich aber immer noch die wesentlich bessere Übereinstimmung für die Multiple Scale Expansionslösung.

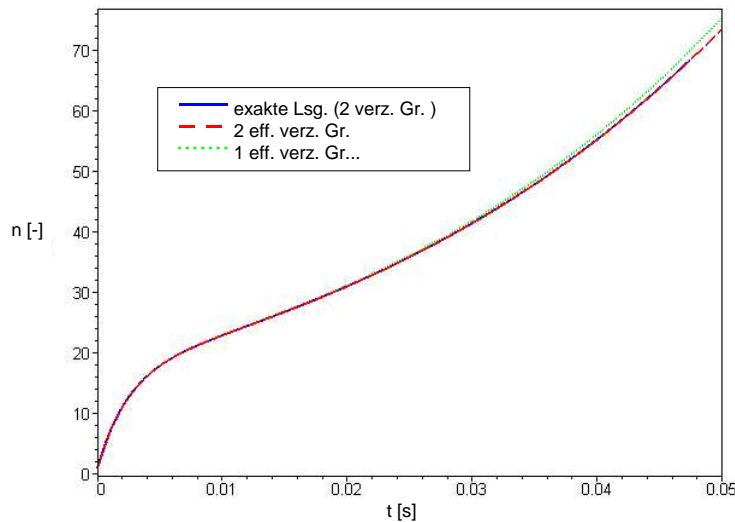


Abb. 3-4: Vergleich der Rechenergebnisse für die zeitliche Änderung der Neutronenpopulation, hervorgerufen durch eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.95$ \$)

Letztlich bleibt noch der Extremfall einer prompt kritischen Reaktivitätsstörung (Abb. 3-5) zu betrachten. Die verzögerten Neutronen haben in diesem Fall keinen wirklichen Einfluss mehr auf das zeitliche Verhalten der Neutronenpopulation. Folglich ist auch kein Unterschied in der Qualität der verschiedenen Näherungslösungen für eine und zwei Gruppen verzögerter Neutronen mehr erkennbar. Wichtig ist an dieser Stelle auch, dass es sich in der standardmäßigen Expansionslösung um eine singuläre Stelle handelt, die aber in der verbesserten Expansionslösung problemlos abgebildet werden kann.

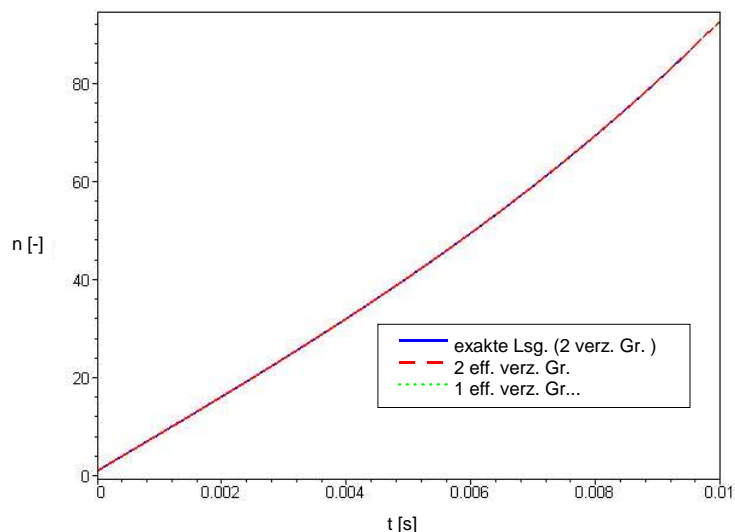


Abb. 3-5: Vergleich der Rechenergebnisse für die zeitliche Änderung der Neutronenpopulation, hervorgerufen durch eine prompt kritische Reaktivitätsstörung ($\rho = 1$ \$)

Nachdem sich in Abb. 3-1 bis Abb. 3-5 gezeigt hat, dass die Qualität einer Näherung mit einer Gruppe verzögerter Neutronen abgesehen vom prompt kritischen Fall für eine weitere Verwendung nicht ausreichend ist, wird in den folgenden Testrechnungen nur noch die verbesserte Version der durch Multiple Scale Expansion gewonnenen Näherung weiter untersucht. Dazu gilt es nun nicht nur die Neutronenpopulation n , sondern auch die Konzentrationen der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen c_1 und c_2 zu untersuchen.

Abb. 3-6, Abb. 3-7 und Abb. 3-8 zeigen das zeitliche Verhalten aller drei zu untersuchenden Funktionen wiederum hervorgerufen durch eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3$ \$).

Die Neutronenpopulation zeigt im Zeitverlauf einmal mehr das für ein multiplizierendes System mit verzögerten Neutronen typische Verhalten, eine Kombination aus dem Prompt Jump am

Beginn und dem nachfolgenden langsamen exponentiellen Anstieg. Zusätzlich kann hier aufgrund der extra gewählten langen Laufzeit der Rechnung aber die Auswirkung der zweiten Gruppe verzögerter Neutronen beobachtet werden. Der asymptotische Prozess des Prompt Jump ist bereits nach etwa 0.001 s abgeschlossen und führt zu einer Steigerung der Neutronenpopulation um einen Faktor von etwa 1.5. Im nächsten Zeitbereich, bis ca. 5 s, nähert sich die Neutronenpopulation einem weiteren asymptotischen Wert (~ 3) an, der durch eine weitere negative Exponentialfunktion vorgegeben ist. Erst im Zeitbereich > 5 s ist dann der typische exponentielle Anstieg der Neutronenpopulation zu beobachten. Die Zusammensetzung der Funktion n für den Zeitverlauf der Neutronenpopulation aus den drei beschriebenen Exponentialfunktionen ist in Syst. 1, mit Zahlenwerten für diese spezielle Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$), dargestellt. Es zeigt sich der Aufbau aus drei Exponentialfunktionen mit jeweils einer Konstante. Die beiden Exponentialfunktionen mit negativem Exponenten, kombiniert mit einer negativen Konstanten klingen ab und sind für die beiden beschriebenen asymptotischen Annäherungen verantwortlich. Die dritte Funktion mit positivem Exponenten ergibt den exponentiellen Anstieg der sich nach längerer Zeit einstellt, wenn die beiden ersten Funktionen bereits zerfallen sind. Aus der Funktion können auch die beiden beschriebenen asymptotischen Werte exakt abgelesen werden (1.43 und 2.86), die nach dem abklingen der jeweiligen Exponentialfunktionen erreicht werden würden. Spätestens an dieser Stelle ist auch leicht zu erklären, warum die Näherung mit nur einer Gruppe verzögerter Neutronen dieses Problem nicht mehr korrekt darstellen kann, denn diese Näherung besteht nur aus 2 Exponentialfunktionen mit zugeordneten Konstanten.

$$n = -0.428 e^{(-5252.4 t)} - 1.441 e^{(-0.6062 t)} + 2.869 e^{(0.0540 t)}$$

Syst. 1: Funktion für den Zeitverlauf der Neutronenpopulation im Testsystem für eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$)

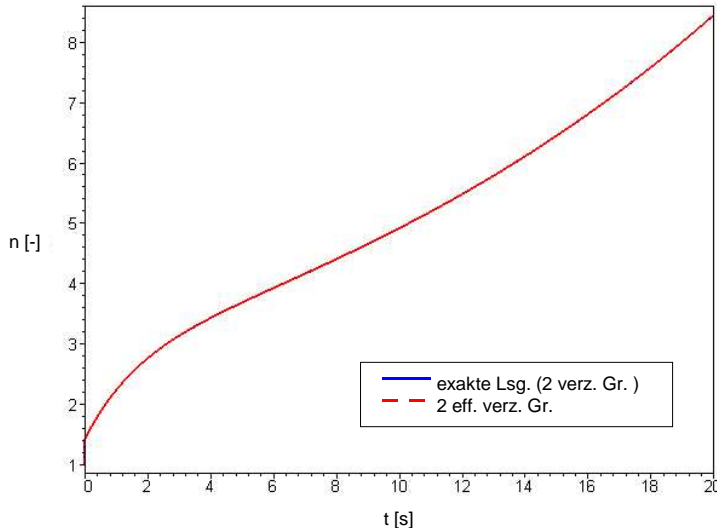


Abb. 3-6: Vergleich der Rechenergebnisse für die zeitliche Änderung der Neutronenpopulation, hervorgerufenen durch eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$)

Die zeitliche Änderung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten Gruppe Abb. 3-7 weist Ähnlichkeit zum Zeitverlauf der Neutronenpopulation eines Systems mit einer Gruppe verzögerter Neutronen auf. Am Beginn steht ein steiler Anstieg, ähnlich dem Prompt Jump (bis ca. 4 s) allerdings mit wesentlich langsamerem Zeitverlauf, gefolgt vom typischen exponentiellen Anstieg. In der Funktion für die Konzentration der Vorläuferkerne der ersten Gruppe verzögerter Neutronen c_1 (Syst. 2) erkennt man den gleichen Aufbau aus 3 Exponentialfunktionen, verknüpft mit jeweils einer Konstanten, wie für die Funktion der Neutronenpopulation n (Syst. 1). Die Funktion ist aus den gleichen Exponenten aufgebaut, nur die Konstanten sind unterschiedlich. Während die erste Exponentialfunktion nur verschwindenden Einfluss hat (kleiner Vorfaktor und betragsmäßig großer Exponent mit negativen Vorzeichen),

sind die anderen beiden Funktionen bestimmend. Die zweite Exponentialfunktion mit negativem Exponenten und negativer Konstante zerfällt wiederum und ergibt einen asymptotischen Wert (ca. 4100). Dieser ist aber in diesem Fall durch die Überlagerung mit dem exponentiellen Anstieg der durch die dritte Exponentialfunktion verursacht wird nicht mehr so deutlich wie beim Prompt Jump in der Funktion für die Neutronenpopulation.

$$c_1 = 0.349 e^{(-5252.4 t)} - 2657.7 e^{(-0.6062 t)} + 4119.3 e^{(0.0540 t)}$$

Syst. 2: Funktion für den Zeitverlauf der Konzentration der Vorläuferkerne für die verzögerten Neutronen der ersten Gruppe im Testsystem für eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$)

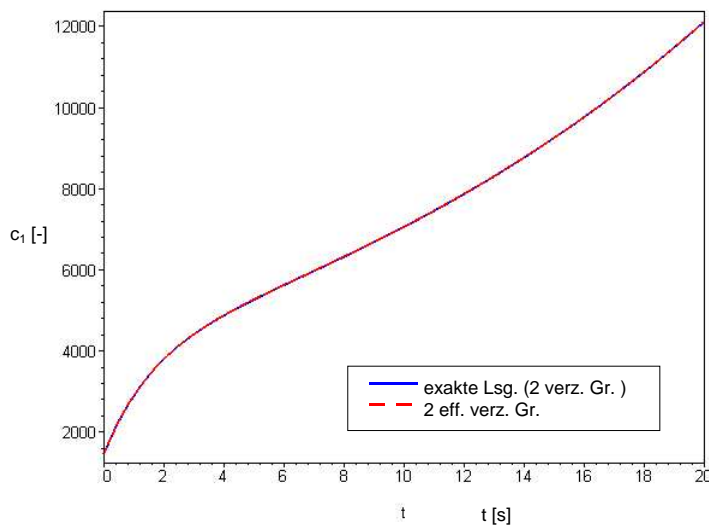


Abb. 3-7: Vergleich der Rechenergebnisse für die zeitliche Änderung der Konzentration der Vorläuferkerne für die verzögerten Neutronen der ersten Gruppe, hervorgehoben durch eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$)

Die zeitliche Änderung der Konzentration der Vorläuferkerne für die zweite Gruppe verzögerter Neutronen in Abb. 3-8 zeigt einen rein exponentiellen Anstieg der Konzentration der Vorläuferkerne c_2 . In der in Syst. 3 dargestellten Funktion ist wieder der Aufbau aus den gleichen drei Exponentialfunktionen zu sehen (vgl. Syst. 1 und Syst. 2), allerdings wiederum mit veränderten Konstanten. Die ersten beiden Funktionen sind mit kleinen Konstanten multipliziert und fallen deshalb für die zeitliche Entwicklung von c_2 kaum ins Gewicht. Hier ist nur die dritte, positive Exponentialfunktion bestimmend.

$$c_2 = 0.263 e^{(-5252.4 t)} + 8009.9 e^{(-0.6062 t)} + 115400 e^{(0.0540 t)}$$

Syst. 3: Funktion für den Zeitverlauf der Konzentration der Vorläuferkerne für die verzögerten Neutronen der zweiten Gruppe im Testsystem für eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$)

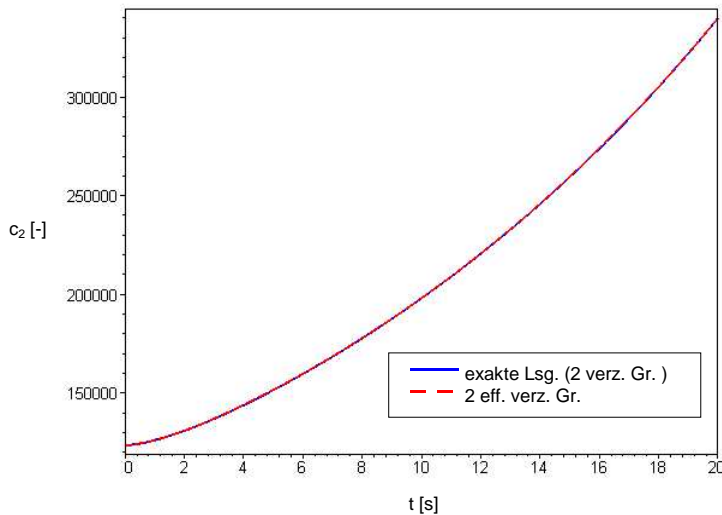


Abb. 3-8: Vergleich der Rechenergebnisse für die zeitliche Änderung der Konzentration der Vorläuferkerne für die verzögerten Neutronen der zweiten Gruppe, hervorgerufen durch eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$)

Für eine genaue Analyse der Qualität der Näherungslösung wird im nächsten Schritt der relative Fehler für die Neutronenpopulation und die Konzentrationen der Vorläuferkerne bestimmt. Der relative Fehler err wird über den gesamten Zeitverlauf folgendermaßen berechnet:

$$err = \frac{\text{exaktes Ergebnis} - \text{Ergebnis der Näherung}}{\text{exaktes Ergebnis}} \quad (3.54)$$

Der relative Fehler der in der Näherungslösung für eine Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) sowohl in der Neutronenpopulation als auch in der Konzentration der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen auftritt, ist in Abb. 3-9 dargestellt. Der relative Fehler in der Neutronenpopulation ist über den gesamten Zeitverlauf unter 0.1 ‰, der relative Fehler in der Konzentration der Vorläuferkerne beider Gruppen verzögerter Neutronen liegt im Bereich von 0.5 ‰. Besonders gilt es anzumerken, dass die relativen Fehler nur im Bereich bis ca. 5 s wachsen und im weiteren zeitlichen Verlauf aber konstant bleiben.

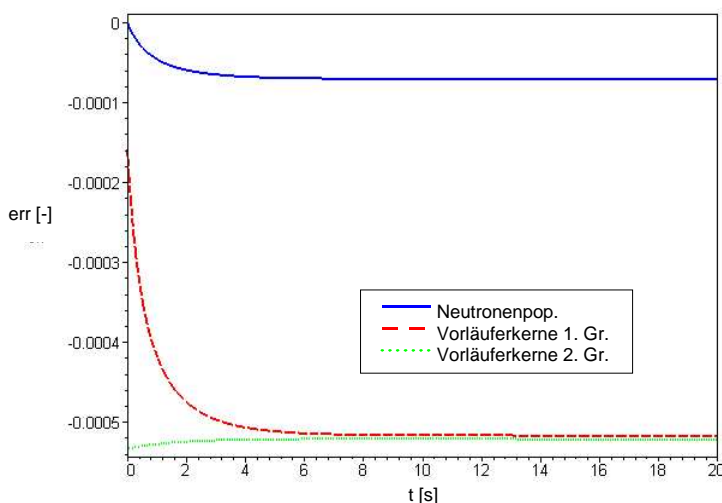


Abb. 3-9: Relativer Fehler der Näherungslösung im Vergleich zur exakten Lösung, für eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$)

Eine weitere Testrechnung zur Analyse der Qualität der Näherungslösung für die punktkinetischen Gleichungen mit einer wesentlich stärkeren Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.6 \$$) ist in den folgenden Abbildungen (Abb. 3-10, Abb. 3-11, Abb. 3-12 und Abb. 3-13) zu sehen.

Der Zeitverlauf der Neutronenpopulation n (Abb. 3-10) zeigt wiederum das typische Verhalten für eine positive Reaktivitätsstörung. Verglichen mit der zuerst analysierten Störung ($\rho = 0.3 \$$)

ist der Prompt Jump wesentlich höher ($\frac{n_1}{n_0} = 2.5$ anstatt $\frac{n_1}{n_0} = 1.43$), die Transiente läuft we-

sentlich schneller ab und die asymptotische Annäherung an die Neutronenpopulation nach dem Zerfall der Vorläuferkerne der ersten Gruppe verzögerter Neutronen ist nicht mehr wahrnehmbar. Diese Veränderung sind auch in der Funktion (Syst. 4) für die stärkere Reaktivitätsstörung deutlich erkennbar. Die Konstante an der ersten Exponentialfunktion, die die Höhe des Prompt Jump abbildet, hat einen größeren Betrag. Der Exponent der zweiten Exponentialfunktion hat einen verhältnismäßig kleineren Betrag, deshalb ist die zweite asymptotische Annäherung kaum mehr wahrnehmbar. Der Exponent der dritten Exponentialfunktion ist deutlich größer, er überlagert einerseits die gerade angesprochene asymptotische Annäherung und ist andererseits auch für den wesentlich schnelleren Anstieg der Neutronenpopulation zuständig.

$$n = -1.496 e^{(-3004.2 t)} - 2.088 e^{(-0.086 t)} + 4.584 e^{(1.332 t)}$$

Syst. 4: Funktion für den Zeitverlauf der Neutronenpopulation im Testsystem für eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.6 \$$)

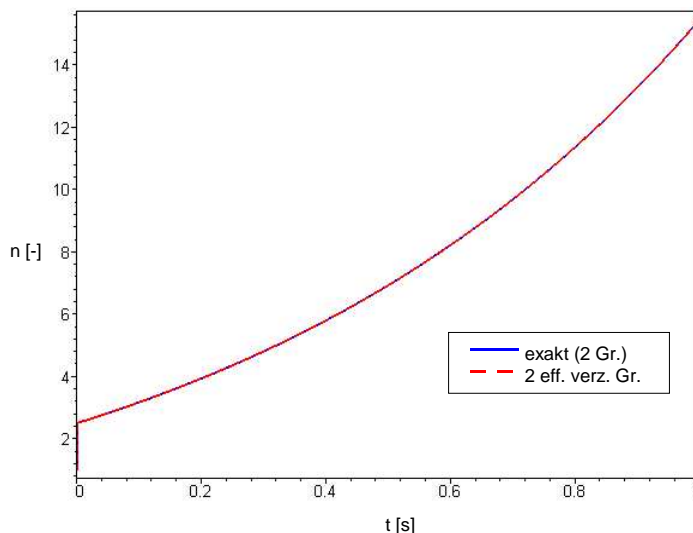


Abb. 3-10: Vergleich der Rechenergebnisse für die zeitliche Änderung der Neutronenpopulation, hervorgerufenen durch eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.6 \$$)

Die Konzentration der Vorläuferkerne der ersten Gruppe verzögerter Neutronen c_1 (Abb. 3-11) wächst aufgrund der stärkeren Störung wesentlich schneller als im vorhergehenden Fall (Abb. 3-7). Der deutlich verstärkte Anstieg am Beginn der Störung (bis ca. 5 s) ist im Gegensatz zur vorherigen Rechnung ebenfalls nicht mehr wahrnehmbar. Das Zeitverhalten wird hier vollkommen durch den schnellen exponentiellen Anstieg der Konzentration der Vorläuferkerne überlagert.

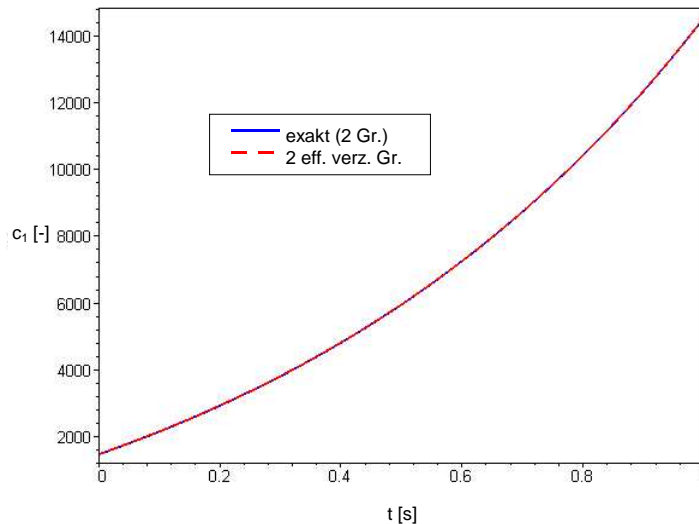


Abb. 3-11: Vergleich der Rechenergebnisse für die zeitliche Änderung der Konzentration der Vorläuferkerne für die verzögerten Neutronen der ersten Gruppe, hervorgerufen durch eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.6 \$$)

Die Konzentration der Vorläuferkerne c_2 (Abb. 3-12) wächst aufgrund der stärkeren Störung wesentlich auch schneller als im vorhergehenden Fall (Abb. 3-8). Der Zeitverlauf zeigt wie gehabt einen gleichmäßigen, exponentiellen Anstieg der Konzentration der Vorläuferkerne.

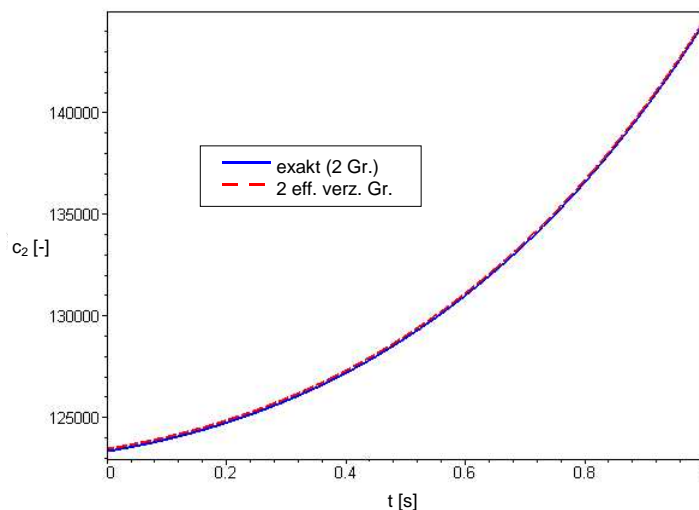


Abb. 3-12: Vergleich der Rechenergebnisse für die zeitliche Änderung der Konzentration der Vorläuferkerne für die verzögerten Neutronen der zweiten Gruppe, hervorgerufen durch eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.6 \$$)

Der relative Fehler err (Abb. 3-13) bewegt sich für die stärkere Störung $\rho = 0.6 \$$ qualitativ in der gleichen Größenordnung wie in der vorhergehenden Rechnung für $\rho = 0.3 \$$ (vgl. Abb. 3-9). Der Fehler der Näherung der Neutronenpopulation n ist begrenzt und im betrachteten Zeitintervall kleiner 0.2 ‰ . Die relativen Fehler in den Konzentrationen der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen sind für die betrachtete Störung geringfügig größer (kleiner 1 ‰) als im vorherigen Fall, aber ebenfalls begrenzt.

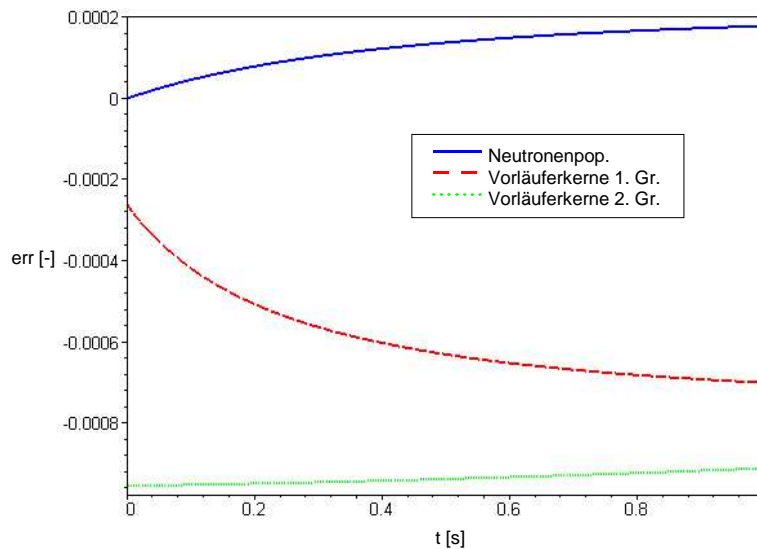


Abb. 3-13: Relativer Fehler der Näherungslösung im Vergleich zu exakten Lösung, für eine positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.6 \$$)

3.2.3 Anwendbarkeit der Näherung mit 2 Gruppen verzögerter Neutronen

Eine wichtige Frage für die Anwendbarkeit dieser analytischen Näherungslösung ist die Limitierung auf 2 Gruppen verzögerter Neutronen. Die Methode ist natürlich nur anwendbar, wenn die Qualität der Näherung mit 2 Gruppen verzögerter Neutronen gut ist, gegenüber der derzeitigen Standardlösung mit 6 Gruppen verzögerter Neutronen. Im Rahmen der Verbesserung der physikalisch gemessenen Daten der verzögerten Neutronenproduktion für einzelne Elemente liegen bereits erste Dokumente vor, in denen mit 8 Gruppen verzögerter Neutronen gearbeitet wird ^{[139], [140]}. Diese grundlegenden Daten die für 6, oder 8 Gruppen für einzelne Aktiniden gemessen wurden müssen in jedem Fall für die entsprechende Reaktormaterialkonfiguration aufbereitet werden, egal ob für 2, oder für 6 Gruppen. Die Daten für die Vergleichsrechnung zwischen den Lösungen für 2 und für 6 Gruppen verzögerter Neutronen in Abb. 3-14 und Abb. 3-15 entsprechen der Materialkonfiguration eines schnellen Reaktors. Die Kondensation von 6 auf 2 Gruppen verzögerter Neutronen wurde hier anhand des Rechenergebnisses von Maple optimiert. Ziel ist ein grundsätzlicher Test, ob 2 Gruppen verzögerter Neutronen für einen limitierten Zeitbereich bis max. 0.5 Sekunden ausreichen, um das Reaktorverhalten abzubilden. Für Betrachtungen über lange Zeiträume, wie beispielsweise für die Beobachtung des Zerfalls der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen, oder der Nachwärmeentwicklung, wäre sicherlich eine größere Anzahl Gruppen verzögerter Neutronen notwendig. Die analytische Entwicklung bietet hier aber auch noch Verbesserungsmöglichkeiten, sie ist zumindest für 3 und 4 Gruppen verzögerter Neutronen analog durchführbar. Der Vergleich zwischen 2 und 6 Gruppen verzögerter Neutronen wird durchgeführt, für exakte Ergebnisse aus analytischen, bzw. semi-analytischen Lösungen, die mit MAPLE 8[®] gewonnen wurden (Abb. 3-14, Abb. 3-15) und für eine iterative Lösung und die Expansionslösung (Abb. 3-16, Abb. 3-17).

Eine erste Vergleichsrechnung für eine starke positive Reaktivitätsstörung ist in Abb. 3-14 dargestellt. In der rein graphischen Auswertung ist kein Unterschied für die Lösungen für 2 und 6 Gruppen verzögerter Neutronen sichtbar.

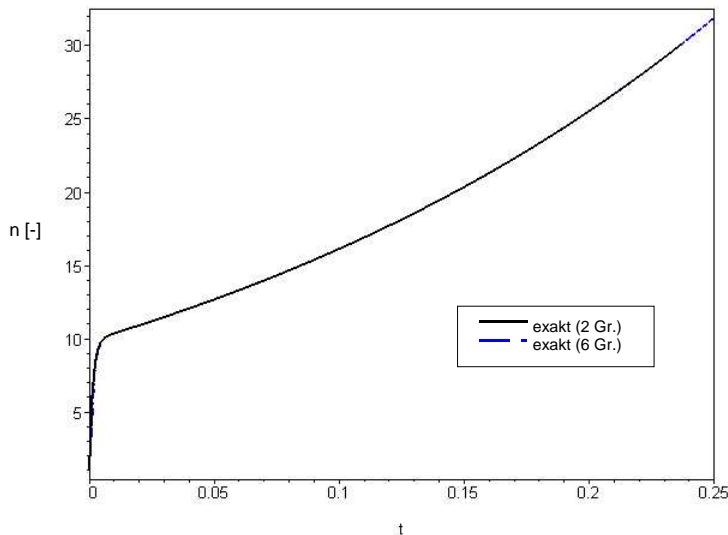


Abb. 3-14: exakt berechnete Neutronenpopulation als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.9 \$$) für 2 effektive und für 6 Gruppen verzögerter Neutronen

Der auftretende Fehler zwischen den Ergebnissen für 2 und für 6 Gruppen verzögerter Neutronen wurde nach Gleichung (3.54) bestimmt.

Der Fehler ist zur Verdeutlichung für 3 verschiedene Zeitpunkte in Tab. 3-1 zusammengefasst. Es ist deutlich sichtbar, dass der Fehler sehr klein ist, aber mit zunehmender Rechenzeit ansteigt. Dieses Verhalten konnte bereits im Vergleich zwischen der Lösung für 1 und für 2 Gruppen verzögerter Neutronen beobachtet werden (vgl. Abb. 3-1). An dieser Stelle sei deshalb nochmals darauf verwiesen, dass die Reihenentwicklung ausgeweitet werden kann. Dies wäre sicherlich für die Betrachtung längerer Zeiträume anzustreben.

Zeit [s]	err
0.01	$0.493 \cdot 10^{-6}$
0.1	$-0.158 \cdot 10^{-5}$
0.5	$0.276 \cdot 10^{-3}$

Tab. 3-1: Fehler über der Zeit für die Ergebnisse der exakten Lösungen für 2 und 6 Gruppen verzögerter Neutronen

Als weiteres Vergleichsbeispiel sind in Abb. 3-15 die Ergebnisse für eine negative Reaktivitätsstörung mit 2 und 6 Gruppen verzögerter Neutronen dargestellt. Auch hier ist die Übereinstimmung für den betrachteten Zeitbereich sehr gut.

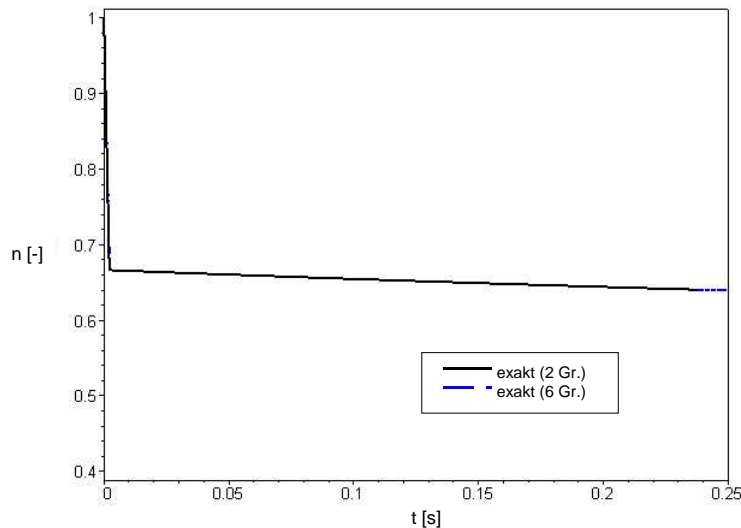


Abb. 3-15: exakt berechnete Neutronenpopulation als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = -0.5$ \$) für 2 effektive und für 6 Gruppen verzögerter Neutronen

Nachdem die punktkinetischen Gleichungen heutzutage in Störfallcodes für schnelle Reaktoren ^{[107], [108]} iterativ auf Basis des Kaganove Algorithmus ^[11] gelöst werden, soll die Expansionslösung auch mit diesem Verfahren verglichen werden. Abb. 3-16 zeigt den Vergleich der iterativen mit einem FORTRAN Code erzielten Lösung für 6 Gruppen verzögerter Neutronen mit den, durch die Expansionslösung gewonnenen Ergebnissen für 1 und für 2 Gruppen verzögerter Neutronen. Auch hier wurden der Rechnung die Daten für den zuvor verwendeten schnellen Reaktor zugrunde gelegt.

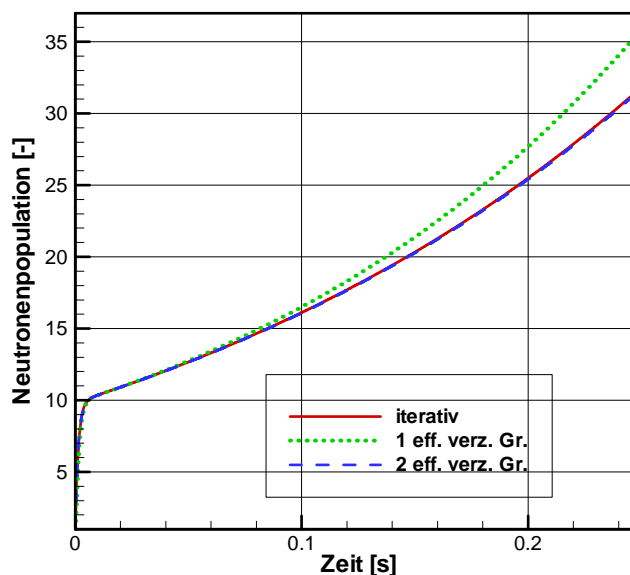


Abb. 3-16: Neutronenpopulation als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.9$ \$) für 6 Gruppen verzögerter Neutronen (iterativ berechnet) und 2 effektive Gruppen verzögerter Neutronen (durch die Expansionslösung berechnet)

Die Übereinstimmung der Expansionslösung mit 2 Gruppen verzögerter Neutronen mit der bisher verwendeten Standardlösung, ist sehr gut, wie die Fehleranalyse in Abb. 3-17 zeigt. Der Fehler beträgt für eine, in den thermohydraulischen Rechnungen anwendbare Zeitschrittweite von 0.1 s, nur etwa 1.5 ‰ und für einen bereits sehr großen Zeitschritt von 0.25 s nur etwa 3.5 ‰.

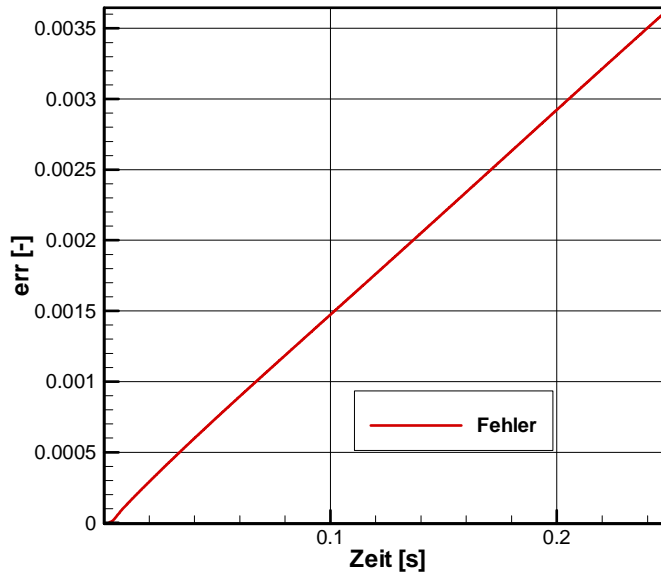


Abb. 3-17: Fehler in der durch die Expansionslösung berechneten Neutronenpopulation mit 2 effektive Gruppen verzögerter Neutronen

3.3 Zusammenfassung

Als erste Auswertung kann festgestellt werden, dass die Multiple Scale Expansion ein geeignetes Verfahren zur Entwicklung von Näherungsfunktionen für die punktkinetischen Gleichungen ist. Mit diesem Verfahren kann das typische, steife Zeitverhalten eines multiplizierenden Systems mit verzögerten Neutronen sehr gut abgebildet werden. Mit Hilfe der verschiedenen Skalen (Scales) können Näherungsfunktionen für die Zeitdifferentiale der Gleichungen für die Neutronenpopulation und die Konzentrationen der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen entwickelt werden.

Die Auswertung der Genauigkeit der analytischen Näherungsfunktionen zeigt, dass die Näherungslösung für die punktkinetischen Gleichungen für 2 Gruppen verzögerter Neutronen mit Hilfe der Multiple Scale Expansion und der nachträglich eingeführten Verbesserungen exzellente Ergebnisse mit nur sehr begrenzten Fehlern liefert. Damit eröffnet sich ein Weg zur Entwicklung von Näherungslösungen für kompliziertere Gleichungen zur Abbildung des raumzeitabhängigen Neutronenflusses in multiplizierenden Systemen mit verzögerter Neutronenproduktion. Eine derartige Erweiterung verändert den Ablauf des Expansionsverfahrens mathematisch gesehen lediglich im Bereich der Gleichung (3.14), hier tritt dann anstatt einer Gleichung ein System von Differentialgleichungen auf.

Ein Vergleich der Möglichkeit der Abbildung eines Systems mit 6 Gruppen verzögerter Neutronen durch die Kondensation auf 2 Gruppen verzögerter Neutronen zeigt für die kurzen, benötigten Zeiträume eine sehr gute Übereinstimmung. Für längere Zeiträume besteht die Möglichkeit die Expansionslösung mit vertretbarem Aufwand auf bis zu 4 Gruppen verzögerter Neutronen zu erweitern. Diese Erweiterung hat, ebenso wie die zuvor erwähnte Erweiterung nur geringen Einfluss auf den Ablauf des Verfahrens. Das aus zwei Gleichungen bestehende Gleichungssystem (3.39), (3.40) erweitert sich für die Betrachtung von 4 Gruppen verzögerter Neutronen zu einem Gleichungssystem mit 4 Gleichungen, bleibt aber weiterhin lösbar.

Die Multiple Scale Expansion bietet also eine zuverlässige Möglichkeit das typische, steife Zeitverhalten eines multiplizierenden Systems mit verzögerten Neutronen sehr gut durch analytische Funktionen anzunähern. Durch die angesprochenen Möglichkeiten zur Erweiterung öffnet sich hiermit ein vollkommen neuer Ansatz zur Entwicklung von Lösungsverfahren für raumzeitabhängige Probleme der Neutronenphysik.

4 MULTIPLE SCALE EXPANSION DER DIFFUSIONSGLEICHUNG

Im letzten Abschnitt ist die Leistungsfähigkeit des Verfahrens der Multiple Scale Expansion für die punktkinetischen Gleichungen getestet worden. Nachdem die entwickelten analytischen Näherungen exzellente Ergebnisse für die punktkinetischen Gleichungen mit 2 Gruppen verzögerter Neutronen geliefert haben, wird in diesem Abschnitt eine Näherungslösung für die Diffusionsgleichung für eine eindimensionale, homogene Zelle mit zwei Gruppen verzögerter Neutronen entwickelt und wiederum gegen die exakte analytische Lösung getestet. Diese analytische Lösung kann durch einen Separationsansatz, die Trennung von Raum und Zeit, problemlos gewonnen werden ^[7].

4.1 Entwicklung der analytischen Näherungsfunktionen

4.1.1 Lösung der Diffusionsgleichung mit einer Gruppe verzögerter Neutronen

Als Ausgangsgleichung für die Multiple Scale Expansion wird die zeitabhängige Diffusionsgleichung mit n Gruppen verzögerter Neutronen verwendet ^{[138], [141]}.

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} + \Sigma_a \phi(x,t) = (1 - \beta) v \Sigma_f \phi(x,t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i(x,t) \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial C_i(x,t)}{\partial t} = \beta v \Sigma_f \phi(x,t) - \lambda_i C_i(x,t), \quad i = 1, \dots, n \quad (4.2)$$

Der Diffusionskoeffizient wird nach Duderstadt ^[138] folgendermaßen festgelegt:

$$D = \frac{1}{3 \Sigma_{tr}} \quad (4.3)$$

Der erste Schritt ist, wie auch bei der Entwicklung der Näherungslösung für die punktkinetischen Gleichungen (vgl. Abschnitt 3.1.1), die Bestimmung der exakten Lösung der Diffusionsgleichung für das System mit einer Gruppe verzögerter Neutronen. Diese exakten Lösungen werden als Grundlage zur Verbesserung der durch Multiple Scale Expansion gewonnenen Näherungslösung benötigt.

Zuerst werden beide Gleichungen, die Diffusionsgleichung und die Gleichung für die Konzentration der Vorläuferkerne, in die für die Multiple Scale Expansion benötigte dimensionslose Form gebracht.

Die Diffusionsgleichung mit einer Gruppe verzögerter Neutronen und die Gleichung zur Bestimmung der Konzentration der Vorläuferkerne für die verzögerten Neutronen in dimensionsloser Schreibweise lauten:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} - \frac{1}{3} s_l \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} - (a_k + a) \phi = \varepsilon c \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = b \phi - \varepsilon c \quad (4.5)$$

Zur Vereinfachung des Gleichungssystems wurden folgende, zusammenfassende Variablen eingeführt:

für den statischen Kritikalitätszustand im unendlich ausgedehnten System

$$a_k = \frac{\nu \Sigma_f - \Sigma_a}{\nu \Sigma_f} \quad (4.6)$$

für die prompten Änderungen im System

$$a = \frac{\lambda_t}{\nu \Sigma_f} + \frac{\beta \nu \Sigma_f}{\nu \Sigma_f} \quad (4.7)$$

mit dem fundamentalen Eigenwert für den Zeitablauf

$$\begin{aligned} \lambda_t = \Sigma_a + DB_n^2 - \nu \Sigma_f &= \int_{-r}^r \left(K_{x1} e^{\sqrt{3} \sqrt{-a_k s_l} \xi} + K_{x2} e^{-\sqrt{3} \sqrt{-a_k s_l} \xi} \right) d\xi \\ &\text{oder} \\ &\int_{-r}^r \left[K_{x1} \cos(\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} \xi) + K_{x2} \sin(\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} \xi) \right] d\xi \end{aligned} \quad (4.8)$$

Dieser Eigenwert definiert die geometrische Flusswölbung (geometrical buckling) als Kritikalitätsbedingung für das statische, stationäre System und damit die benötigte Größe des Systems zur Erreichung von Kritikalität.

Weiterhin sind eingeführt:

für die verzögerten Änderungen im System

$$b = \frac{\beta \nu \Sigma_f}{\nu \Sigma_f} \quad (4.9)$$

für die Effektivität des diffusiven Transports von Neutronen innerhalb des Systems

$$s_l = \frac{\Sigma_{tr}}{\nu \Sigma_f} \quad (4.10)$$

die dimensionslose Raumkoordinate ξ

$$\xi = \nu \Sigma_f x \quad (4.11)$$

und die dimensionslose Zeit τ eingeführt

$$\tau = \nu \Sigma_f t \quad (4.12)$$

Die dimensionslose Zeit τ liefert für die spätere Multiple Scale Expansion die erste Zeitskala. Der kleine Parameter ε wird als

$$\varepsilon = \frac{\lambda}{\nu \Sigma_f} \quad (4.13)$$

festgelegt und die Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen wird folgendermaßen definiert:

$$c = vC \quad (4.14)$$

Als exakte Lösungen für das dimensionslose System bestehend aus den beiden Differentialgleichungen (4.4) und (4.5) ergibt sich:

- für $a_k < 0$:
eine Kombination aus zwei Exponentialfunktionen für die räumliche Verteilung des Neutronenflusses ϕ und der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen c und zwei Exponentialfunktionen für das zeitliche Verhalten des Neutronenflusses ϕ und der Konzentration der Vorläuferkerne c . Alle vier Exponentialfunktionen sind jeweils mit einer Konstanten (K_{x1} , K_{x2} , K_{t1} , K_{t2}) multipliziert.

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \tau) = & \left(K_{x1} e^{\sqrt{3}\sqrt{-a_k s_1} \xi} + K_{x2} e^{-\sqrt{3}\sqrt{-a_k s_1} \xi} \right) K_{t1} e^{\frac{1}{2}(a-\varepsilon-sq)\tau} \\ & + \left(K_{x1} e^{\sqrt{3}\sqrt{-a_k s_1} \xi} + K_{x2} e^{-\sqrt{3}\sqrt{-a_k s_1} \xi} \right) K_{t2} e^{\frac{1}{2}(a-\varepsilon+sq)\tau} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} c(\xi, \tau) = & \frac{-a-\varepsilon+sq}{2\varepsilon} \left(K_{x1} e^{\sqrt{3}\sqrt{-a_k s_1} \xi} + K_{x2} e^{-\sqrt{3}\sqrt{-a_k s_1} \xi} \right) K_{t1} e^{\frac{1}{2}(a-\varepsilon-sq)\tau} \\ & + \frac{-a-\varepsilon-sq}{2\varepsilon} \left(K_{x1} e^{\sqrt{3}\sqrt{-a_k s_1} \xi} + K_{x2} e^{-\sqrt{3}\sqrt{-a_k s_1} \xi} \right) K_{t2} e^{\frac{1}{2}(a-\varepsilon+sq)\tau} \end{aligned} \quad (4.16)$$

- für $a_k > 0$:
eine Kombination aus zwei trigonometrischen Funktionen für die räumliche Verteilung des Neutronenflusses ϕ und der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen c und zwei Exponentialfunktionen für das zeitliche Verhalten des Neutronenflusses ϕ und der Konzentration der Vorläuferkerne c . Sowohl die trigonometrischen Funktionen als auch die Exponentialfunktionen sind jeweils mit einer Konstanten (K_{x1} , K_{x2} , K_{t1} , K_{t2}) multipliziert.

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \tau) = & \left[K_{x1} \cos(\sqrt{3}\sqrt{a_k s_1} \xi) + K_{x2} \sin(\sqrt{3}\sqrt{a_k s_1} \xi) \right] K_{t1} e^{\frac{1}{2}(a-\varepsilon-sq)\tau} \\ & + \left[K_{x1} \cos(\sqrt{3}\sqrt{a_k s_1} \xi) + K_{x2} \sin(\sqrt{3}\sqrt{a_k s_1} \xi) \right] K_{t2} e^{\frac{1}{2}(a-\varepsilon+sq)\tau} \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} c(\xi, \tau) = & \frac{-a-\varepsilon+sq}{2\varepsilon} \left[K_{x1} \cos(\sqrt{3}\sqrt{a_k s_1} \xi) + K_{x2} \sin(\sqrt{3}\sqrt{a_k s_1} \xi) \right] K_{t1} e^{\frac{1}{2}(a-\varepsilon-sq)\tau} \\ & + \frac{-a-\varepsilon-sq}{2\varepsilon} \left[K_{x1} \cos(\sqrt{3}\sqrt{a_k s_1} \xi) + K_{x2} \sin(\sqrt{3}\sqrt{a_k s_1} \xi) \right] K_{t2} e^{\frac{1}{2}(a-\varepsilon+sq)\tau} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Die Exponenten, bzw. Argumente stellen die materielle Flusswölbung (material buckling) im stationären Zustand ($\lambda_t = 0$) dar. Die Exponenten, bzw. Argumente und die Konstanten (K_{xn}) für die räumlichen Verteilungen können aus der statischen Lösung der Diffusionsgleichung bestimmt werden. Die Exponenten für das zeitliche Verhalten des Systems sind die Lösungen der charakteristischen Gleichung, die Konstanten (K_{tn}) müssen aus den Anfangswerten bestimmt werden.

Zur einfacheren Lesbarkeit ist der Quadratwurzelterm der Lösung der quadratischen Gleichung folgendermaßen abgekürzt:

$$sq = \sqrt{a^2 + 2\varepsilon a + \varepsilon^2 + 4b\varepsilon} . \quad (4.19)$$

Die exakten Lösungen (4.15) und (4.16), (4.17) und (4.18) für die Diffusionsgleichung mit einer Gruppe verzögerter Neutronen und die Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen sind eine Linearkombination aus den Exponentialfunktionen für das zeitliche Verhalten des Systems – welches gleich dem der punktkinetischen Näherung des Systems ist - (vgl. Gl. (3.9) und (3.10)) und der Funktion der statischen Neutronenflussverteilung.

Die Bestimmung der beiden Konstanten K_{t1} und K_{t2} in den Gleichungen (4.15) und (4.17) für den Neutronenfluss ϕ und in den Gleichungen (4.16) und (4.18) für die Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen c führt unter Verwendung der Anfangswerte ϕ_0 und c_0 zu

$$K_{t1} = \frac{1}{2} \frac{(-a \phi_0 - \varepsilon \phi_0 + s q \phi_0 - 2 c_0 \varepsilon)}{s q} \quad (4.20)$$

$$K_{t2} = \frac{1}{2} \frac{(a \phi_0 + \varepsilon \phi_0 + s q \phi_0 + 2 c_0 \varepsilon)}{s q} \quad (4.21)$$

Die Anfangswerte im Falle eines stationären Systems lauten:

$$\begin{aligned} \phi(\xi, 0) &= \phi_0 \phi(\xi) \\ \phi_0 &= 1 \\ c(\xi, 0) &= c_0 c(\xi) \\ c_0 &= \frac{\beta}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Die Konstanten für die Funktionen der räumlichen Verteilung K_{x1} und K_{x2} können, wie bereits erwähnt, mit Hilfe der statischen Randbedingungen bestimmt werden.

4.1.2 Lösung des Systems mit zwei Gruppen verzögerter Neutronen

Für die Multiple Scale Expansion der Diffusionsgleichung mit zwei Gruppen verzögerter Neutronen und der Gleichungen für die Konzentrationen der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen wird das folgende dimensionslose Differentialgleichungssystem benötigt. Die Gleichungen repräsentieren den Neutronenfluss ϕ , den Neutronenstrom j und die Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_1 und c_2 .

Die Expansion muss in diesem Fall in drei unterschiedliche Zeitskalen aufgeteilt werden, die Skala der prompten Neutronengeneration und zwei Skalen analog der beiden verschiedenen Zerfallskonstanten der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen. Die Darstellung der Diffusionsgleichung in zwei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung wurde gewählt um einen Vergleich mit der im nächsten Kapitel folgenden Entwicklung der Näherungslösung für die P_1 Gleichungen zu erleichtern.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\partial j}{\partial \xi} - (a_k + a) \phi = \varepsilon_1 c_1 + \varepsilon_2 c_2 \quad (4.22)$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + s_1 j = 0 \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial c_m}{\partial \tau} = b_m \phi - \varepsilon_m c_m \quad m = 1..2 \quad (4.24)$$

Die dimensionslose Zeit τ wird analog der eingeführten Definition aus Abschnitt 4.1.1 übernommen (siehe Gleichung (4.12)), die beiden zusätzlich benötigten Zeitskalen ergeben sich aus den beiden kleinen Parametern ε_m .

$$\varepsilon_m = \frac{\lambda_m}{\nu \Sigma_f} \quad m = 1..2 \quad (4.25)$$

Die angesprochenen 3 Zeitskalen für die Multiple Scale Expansion definieren sich aus der dimensionslosen Zeit τ und aus der Multiplikation der dimensionslosen Zeit τ mit den beiden kleinen Parametern ε_1 und ε_2 analog zu der Entwicklung für die punktkinetischen Gleichungen (vgl. Gl. (3.17)).

$$\tau_0 = \tau, \quad \tau_1 = \varepsilon_1 \tau, \quad \tau_2 = \varepsilon_2 \tau \quad (4.26)$$

Die zu expandierenden Variablen Neutronenfluss ϕ , Neutronenstrom j und die Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_m werden durch die Expansion in Funktionen in den drei Zeitskalen entwickelt.

$$\phi = \phi(\xi, \tau_0, \tau_1, \tau_2) \quad (4.27)$$

$$j = j(\xi, \tau_0, \tau_1, \tau_2) \quad (4.28)$$

$$c_m = c_m(\xi, \tau_0, \tau_1, \tau_2) \quad m = 1..2 \quad (4.29)$$

Der Operator der Zeitableitung $\frac{d}{d\tau}$ wird aus der Entwicklung für die punktkinetischen Gleichungen übernommen (Gl (3.20)).

Wird die Multiple Scale Expansion des Zeitparameters τ , Gleichung (4.26), nun auf die Variablen Neutronenfluss ϕ , Neutronenstrom j und die Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_m angewendet, so entstehen die folgenden unendlichen Reihen.

$$\phi = f_0 + \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2 + \varepsilon_1^2 f_3 + \varepsilon_2^2 f_4 + \dots \quad (4.30)$$

$$j = j_0 + \varepsilon_1 j_1 + \varepsilon_2 j_2 + \varepsilon_1^2 j_3 + \varepsilon_2^2 j_4 + \dots \quad (4.31)$$

$$c_m = c_{m0} + \varepsilon_1 c_{m1} + \varepsilon_2 c_{m2} + \varepsilon_1^2 c_{m3} + \varepsilon_2^2 c_{m4} + \dots \quad m = 1..2 \quad (4.32)$$

Die Qualität der Näherungslösungen ist davon abhängig, nach welchem Glied die Reihenentwicklung abgebrochen wird.

In den folgenden Schritten gilt es nun, die in den Gleichungen (4.30), (4.31) und (4.32) eingeführten Koeffizienten f_x , j_x und c_{mx} zu bestimmen.

Im ersten Schritt sind die Gleichungen der Multiple Scale Expansion der 0. Ordnung in ε zu lösen. Diese Gleichungen spiegeln das Systemverhalten aufgrund der prompten Neutronenproduktion wieder.

Die gesamte Gleichung für die Multiple Scale Expansion erhält man durch Einsetzen der Gleichungen (3.20) und (4.30) bis (4.32) in die dimensionslosen Ursprungsgleichungen (4.22) bis (4.24). Zusammengefasst ergeben die Terme 0. Ordnung in ε folgende Gleichungen für den Neutronenfluss f_0 , den Neutronenstrom j_0 und die Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_{m0} :

$$\frac{\partial f_0}{\partial \tau_0} + \frac{\partial j_0}{\partial \xi} - (a_k + a)\phi_0 = 0 \quad (4.33)$$

$$\frac{1}{3} \frac{\partial f_0}{\partial \xi} + s_1 j_0 = 0 \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial c_{m0}}{\partial \tau_0} = b_m \phi_0 \quad m = 1..2 \quad (4.35)$$

Die Lösungen dieses Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung geben Information über die Anpassung des prompten Neutronenflusses f_0 , des prompten Neutronenstromes j_0 und die Veränderung der Konzentration der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_{10} und c_{20} , die durch eine Störung verursacht wird.

Die Lösungen definieren sich folgendermaßen:

- für $a_k < 0$ ergibt sich wieder eine Kombination aus Exponentialfunktionen in Raum und Zeit mit zugeordneten Konstanten

$$f_0 = (K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi}) A_0 e^{e_e \tau_0} \quad (4.36)$$

$$j_0 = j_e (K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi}) A_0 e^{e_e \tau_0} \quad (4.37)$$

$$c_{10} = \frac{b_1}{e_e} (K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi}) A_0 e^{e_e \tau_0} + B_{10}(\xi) \quad (4.38)$$

$$c_{20} = \frac{b_2}{e_e} (K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi}) A_0 e^{e_e \tau_0} + B_{20}(\xi) \quad (4.39)$$

mit

$$e_a = \sqrt{-3a_k s_1} \quad (4.40)$$

$$j_e = -\frac{1}{3s_1} \sqrt{-3a_k s_1} \quad (4.41)$$

$$e_e = a \quad (4.42)$$

- für $a_k > 0$ ergibt sich eine Kombination aus trigonometrischen Funktionen im Raum und Exponentialfunktionen in der Zeit mit jeweils zugeordneten Konstanten

$$f_0 = [K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi)] A_0 e^{e_i \tau_0} \quad (4.43)$$

$$j_0 = j_t [K_{x1} \sin(x_t \xi) - K_{x2} \cos(x_t \xi)] A_0 e^{e_i \tau_0} \quad (4.44)$$

$$c_{10} = \frac{b_1}{e_i} [K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi)] A_0 e^{e_i \tau_0} + B_{10}(\xi) \quad (4.45)$$

$$c_{20} = \frac{b_2}{e_t} [K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi)] A_0 e^{e_t \tau_0} + B_{20}(\xi) \quad (4.46)$$

mit

$$x_t = \sqrt{3a_k s_1} \quad (4.47)$$

$$j_t = \frac{I}{3s_1} \sqrt{3a_k s_1} \quad (4.48)$$

$$e_t = a \quad (4.49)$$

Es gilt hier zu beachten, dass, wie auch schon in den punktkinetischen Gleichungen, die zu bestimmenden Konstanten A_0 , B_{10} und B_{20} in τ_0 mit Hilfe der Gleichungen höherer Ordnung in ε und der Anfangswerte ermittelt werden müssen. A_0 , B_{10} und B_{20} sind bisher als konstant in Bezug auf τ_0 festgelegt, können aber durchaus Funktionen in Bezug auf τ_1 und τ_2 sein.

Im zweiten Schritt sind die Gleichungen der Multiple Scale Expansion der 1. Ordnung in ε zu lösen. Aus der gesamten Gleichung der Multiple Scale Expansion zusammengefasst ergeben die Terme 1. Ordnung in ε folgende Gleichungen für die Neutronenflüsse f_1 und f_2 , die Neutronenströme j_1 und j_2 und die Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_{m1} und c_{m2} .

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \frac{\partial f_1}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial f_2}{\partial \tau_0} + \varepsilon_1 \frac{\partial f_0}{\partial \tau_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial f_0}{\partial \tau_2} + \varepsilon_1 \frac{\partial j_1}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \frac{\partial j_2}{\partial \xi} \\ - \varepsilon_1 (a_k + a) f_1 - \varepsilon_2 (a_k + a) f_2 = \varepsilon_1 c_{10} + \varepsilon_2 c_{20} \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\varepsilon_1 \frac{1}{3} \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \frac{1}{3} \frac{\partial f_2}{\partial \xi} + \varepsilon_1 s_1 j_1 + \varepsilon_2 s_1 j_2 = 0 \quad (4.51)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial c_{m1}}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial c_{m2}}{\partial \tau_0} + \varepsilon_1 \frac{\partial c_{m0}}{\partial \tau_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial c_{m0}}{\partial \tau_2} = \varepsilon_1 b_m f_1 + \varepsilon_2 b_m f_2 - \varepsilon_m c_{m0} \quad m = 1..2 \quad (4.52)$$

Die Gleichungen (4.50) und (4.51) enthalten, gegenüber den Gleichungen (4.33) und (4.34) zusätzlich die Information über die Anpassung des Neutronenflusses f_1 und f_2 und des Neutronenstromes j_1 und j_2 , aufgrund der Produktion von Neutronen aus dem Zerfall der Vorläuferkerne im Zeithorizont τ_1 und τ_2 . Die Gleichungen (4.52) enthalten ebenfalls gegenüber den Gleichungen 0. Ordnung (4.35), die zusätzliche Information über die Veränderung der Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_{m1} und c_{m2} . Die Konzentrationsveränderungen entstehen aufgrund der Produktion von Vorläuferkernen durch verzögerte Neutronen und des Zerfalls von, bereits im Zeithorizont τ_0 produzierten, Vorläuferkernen im Zeithorizont τ_1 und τ_2 .

Die folgenden Herleitungsschritte bis zur Bestimmung der Lösungen für f_1 , f_2 usw. werden der Übersichtlichkeit halber nur für $a_k < 0$ durchgeführt, verlaufen aber für $a_k > 0$ analog.

Durch Einsetzen der im vorherigen Schritt bestimmten Lösungen (4.38), (4.39) und der abgeleiteten Lösung (4.36) erhält man folgende Gleichungen für die Neutronenpopulationen n_1 und n_2 und die Neutronenströme j_1 und j_2 :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 \frac{\partial f_1}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial f_2}{\partial \tau_0} + \varepsilon_1 \frac{\partial j_1}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \frac{\partial j_2}{\partial \xi} - \varepsilon_1 (a_k + a) f_1 - \varepsilon_2 (a_k + a) f_2 = \\
 \varepsilon_1 \frac{b_1}{e_e} (K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi}) A_0 e^{e_e \tau_0} + \varepsilon_1 B_{10}(\xi) \\
 + \varepsilon_2 \frac{b_2}{e_e} (K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi}) A_0 e^{e_e \tau_0} + \varepsilon_2 B_{20}(\xi) \quad . \\
 - \varepsilon_1 (K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi}) \frac{\partial A_0}{\partial \tau_1} e^{e_e \tau_0} \\
 - \varepsilon_2 (K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi}) \frac{\partial A_0}{\partial \tau_2} e^{e_e \tau_0}
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\varepsilon_1 \frac{1}{3} \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \frac{1}{3} \frac{\partial f_2}{\partial \xi} + \varepsilon_1 s_1 j_1 + \varepsilon_2 s_1 j_2 = 0 \tag{4.54}$$

Aus der Gleichung (4.53) ergibt sich eine Bedingung zur Bestimmung der Unbekannten A_0 aus den Lösungen (4.36) bis (4.39). Nachdem die Neutronenpopulationen n_1 und n_2 nicht von τ_0 abhängig sein dürfen, ergibt sich folgende Gleichung zur Bestimmung von A_0 .

$$\varepsilon_1 \left(\frac{\partial A_0}{\partial \tau_1} - \alpha_1 A_0 \right) + \varepsilon_2 \left(\frac{\partial A_0}{\partial \tau_2} - \alpha_2 A_0 \right) = 0. \tag{4.55}$$

Zur Vereinfachung sind hier die Variablen

$$\alpha_m = \frac{b_m}{a} \quad m = 1..2 \tag{4.56}$$

eingeführt. Die Lösung dieser Gleichung definiert A_0 als Funktion der Zeitskalen τ_1 und τ_2 .

$$A_0(\tau_1, \tau_2) = D_0 e^{\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2} \tag{4.57}$$

Diese Funktion enthält Information über die Auswirkung der Produktion verzögerter Neutronen auf die Anpassung des Systems im kurzen Zeithorizont, dem Zeitbereich des sogenannten „Prompt Jump“.

Nach der Bedingung zur Bestimmung von A_0 reduzieren sich die Gleichungen (4.50) und (4.51) folgendermaßen:

$$\varepsilon_1 \frac{\partial f_1}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial f_2}{\partial \tau_0} + \varepsilon_1 \frac{\partial j_1}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \frac{\partial j_2}{\partial \xi} - \varepsilon_1 (a_k + a) f_1 - \varepsilon_2 (a_k + a) f_2 = \varepsilon_1 B_{10}(\xi) + \varepsilon_2 B_{20}(\xi) \tag{4.58}$$

$$\varepsilon_1 \frac{1}{3} \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \frac{1}{3} \frac{\partial f_2}{\partial \xi} + \varepsilon_1 s_1 j_1 + \varepsilon_2 s_1 j_2 = 0 \tag{4.59}$$

mit

$$B_{10}(\xi) = b_{01e} (K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi}) \tag{4.60}$$

$$B_{20}(\xi) = b_{02e} (K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi}) \quad (4.61)$$

Die räumliche Verteilung der verzögerten Neutronen in den Funktionen $B_{10}(\xi)$ und $B_{20}(\xi)$ wird hier in erster Näherung durch die gleiche Funktion, die für die prompte Neutronenverteilung entwickelt wurde, dargestellt. Dies ist naheliegend, denn die Produktion der verzögerten Neutronen ist, lediglich zeitverzögert an die Produktion der prompten Neutronen gebunden. Solange also in diesem Zeitraum zwischen der Produktion der prompten Neutronen und dem Entstehen der verzögerten Neutronen keine wesentliche Änderung in der Neutronenflussverteilung auftritt, können die beiden Verteilungen als gleich angenommen werden. Diese Vorgabe ist in einer homogenen Zelle innerhalb eines Rechenschrittes immer gegeben.

Die Lösung der partiellen Differentialgleichungen ergibt folgende Ergebnisse für die Neutronenpopulationen n_1 und n_2 und die Neutronenströme j_1 und j_2 in den Zeitskalen des Zerfalls der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen.

Die Lösung lautet:

- für $a_k < 0$:

$$f_1 = (K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi}) A_1 e^{e_e \tau_0} + z_{1e} b_{01e} (K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi}) \quad (4.62)$$

$$f_2 = (K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi}) A_2 e^{e_e \tau_0} + z_{1e} b_{02e} (K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi}) \quad (4.63)$$

$$j_1 = j_e (K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi}) A_1 e^{e_e \tau_0} + z_{2e} b_{01e} (K_{d1} e^{e_a \xi} - K_{d2} e^{-e_a \xi}) \quad (4.64)$$

$$j_2 = j_e (K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi}) A_2 e^{e_e \tau_0} + z_{2e} b_{02e} (K_{d1} e^{e_a \xi} - K_{d2} e^{-e_a \xi}) \quad (4.65)$$

mit

$$z_{1e} = -\frac{1}{a} \quad (4.66)$$

$$z_{2e} = \frac{1}{3as_1} e_a \quad (4.67)$$

- für $a_k > 0$:

$$f_1 = [K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi)] A_1 e^{e_e \tau_0} + z_{1t} b_{01t} [K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi)] \quad (4.68)$$

$$f_2 = [K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi)] A_2 e^{e_e \tau_0} + z_{1t} b_{02t} [K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi)] \quad (4.69)$$

$$j_1 = j_t [K_{x1} \sin(x_t \xi) - K_{x2} \cos(x_t \xi)] A_1 e^{e_e \tau_0} + z_{2t} b_{01t} [K_{d1} \sin(x_t \xi) - K_{d2} \cos(x_t \xi)] \quad (4.70)$$

$$j_2 = j_t [K_{x1} \sin(x_t \xi) - K_{x2} \cos(x_t \xi)] A_2 e^{e_e \tau_0} + z_{2t} b_{02t} [K_{d1} \sin(x_t \xi) - K_{d2} \cos(x_t \xi)] \quad (4.71)$$

mit

$$z_{1t} = -\frac{1}{a} \quad (4.72)$$

$$z_{2t} = -\frac{I}{3as_I} x_t \quad (4.73)$$

In den folgenden Schritten müssen die Gleichungen der ersten Ordnung in ε zur Bestimmung der Veränderung der Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_{m1} und c_{m2} (Gl. (4.52)) gelöst werden.

Analog der Lösung für die punktkinetischen Gleichungen (Abschnitt 3.1.2) müssen die Ergebnisse für f_1 und f_2 , für c_{10} und c_{20} und die abgeleiteten Ergebnisse für c_{10} und c_{20} in die Gleichungen der ersten Ordnung für ε eingesetzt werden. Die entstehenden Gleichungen liefern dann die folgenden Bedingungen zur Bestimmung der Variablen b_{01} und b_{02} die Konstanten in τ_0 sind, aber Funktionen in τ_1 und τ_2 sein können:

$$\varepsilon_1 \frac{\partial b_{01e}}{\partial \tau_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial b_{01e}}{\partial \tau_2} + \varepsilon_1 \alpha_1 b_{01e} + \varepsilon_1 b_{01e} = -\varepsilon_2 \alpha_1 b_{02e} \quad (4.74)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial b_{02e}}{\partial \tau_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial b_{02e}}{\partial \tau_2} + \varepsilon_2 \alpha_2 b_{02e} + \varepsilon_2 b_{02e} = -\varepsilon_1 \alpha_2 b_{01e} \quad (4.75)$$

Dieses partielle Differentialgleichungssystem könnte nun ein weiteres Mal durch eine Multiple Scale Expansion gelöst werden. Da es sich bei diesem System aber nicht um ein steifes Problem handelt und da eine exakte Lösung aber problemlos zu erzielen ist, wird dieses Verfahren hier bevorzugt. Die exakte Lösung dieses partiellen Differentialgleichungssystems besteht wiederum aus einer Kombination von zwei Konstanten und zwei Exponentialfunktionen.

$$b_{01e} = K_{B1} e^{-\frac{I}{2}[(\alpha_1+I)\varepsilon_1 + (\alpha_2+I)\varepsilon_2 - sr]\tau} + K_{B2} e^{-\frac{I}{2}[(\alpha_1+I)\varepsilon_1 + (\alpha_2+I)\varepsilon_2 + sr]\tau} \quad (4.76)$$

$$b_{02e} = -\frac{a}{2} \frac{(\alpha_1+I)\varepsilon_1 - (\alpha_2+I)\varepsilon_2 + sr}{\varepsilon_2 b_1} K_{B1} e^{-\frac{I}{2}[(\alpha_1+I)\varepsilon_1 + (\alpha_2+I)\varepsilon_2 - sr]\tau} - \frac{a}{2} \frac{(\alpha_1+I)\varepsilon_1 - (\alpha_2+I)\varepsilon_2 - sr}{\varepsilon_2 b_1} K_{B2} e^{-\frac{I}{2}[(\alpha_1+I)\varepsilon_1 + (\alpha_2+I)\varepsilon_2 + sr]\tau} \quad (4.77)$$

Zur Vereinfachung ist hier als Abkürzung für den Quadratwurzelterm

$$sr = \sqrt{\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_2\alpha_2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_1^2\alpha_1 + \varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_2^2\alpha_2 - 2\varepsilon_2\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2^2\alpha_2^2 + 2\varepsilon_2\alpha_1\varepsilon_1\alpha_2 + \varepsilon_1^2\alpha_1^2} \quad (4.78)$$

eingeführt.

An dieser Stelle wird die Expansion abgebrochen, denn die ermittelten Exponenten sind ausreichend präzise für eine Näherungslösung 1. Ordnung für die Diffusionsgleichung. In den höheren Ordnungen sind für die Entwicklung keine mehrskaligen Informationen mehr vorhanden, deshalb würden weitere Schritte nur noch zur Verbesserung der Reihenentwicklung an sich führen, dies ist aber in anderer Weise einfacher zu erreichen. Die benötigten Konstanten K_{B1} und K_{B2} müssen mit Hilfe der Anfangsbedingungen bestimmt werden.

Die Gesamtlösung für den Neutronenfluss ϕ , kann Gleichung (4.30) folgend aus den einzelnen Lösungen f_0 , f_1 und f_2 zusammengesetzt werden. Der Neutronenfluss in der Zeitskala der prompten Neutronenproduktion f_0 ergibt sich aus den Gleichungen (4.36) und (4.57) oder (4.43) und (4.57). Der Neutronenfluss in der Zeitskala des Zerfalls der Vorläuferkerne der ersten Gruppe verzögerter Neutronen f_1 ergibt sich aus den Gleichungen (4.62), oder (4.68) und den Lösungen (4.76). Der Neutronenfluss in der Zeitskala des Zerfalls der Vorläuferkerne der

zweiten Gruppe verzögerter Neutronen f_2 ergibt sich aus den Gleichungen (4.63), oder (4.69) und den Lösungen (4.77). Werden diese Gleichungen alle zusammengefügt, ergeben sich für den gesamten Neutronenfluss ϕ folgenden Gleichungen:

- für $a_k < 0$:

$$\begin{aligned}
 \phi = f_0 + \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2 = & \left(K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) D_0 e^{\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2} e^{e_e \tau_0} \\
 & + \varepsilon_1 \left(K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) A_1 e^{e_e \tau_0} \\
 & + \varepsilon_1 z_{1e} \left(K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi} \right) \\
 & \left(K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr]\tau} + K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr]\tau} \right) \\
 & + \varepsilon_2 \left(K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) A_2 e^{e_e \tau_0} \\
 & - \varepsilon_2 z_{1e} \left(K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi} \right) \\
 & \frac{a(\alpha_1+1)\varepsilon_1 - (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr}{2\varepsilon_2 b_1} K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr]\tau} \\
 & - \varepsilon_2 z_{1e} \left(K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi} \right) \\
 & \frac{a(\alpha_1+1)\varepsilon_1 - (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr}{2\varepsilon_2 b_1} K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr]\tau}
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

- für $a_k > 0$:

$$\begin{aligned}
 \phi = f_0 + \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2 = & \left[K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi) \right] D_0 e^{\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2} e^{e_e \tau_0} \\
 & + \varepsilon_1 \left[K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi) \right] A_1 e^{e_e \tau_0} \\
 & + \varepsilon_1 z_{1t} \left[K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi) \right] \\
 & \left(K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr]\tau} + K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr]\tau} \right) \\
 & + \varepsilon_2 \left[K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi) \right] A_2 e^{e_e \tau_0} \\
 & + \frac{1}{2} z_{1t} \left[K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi) \right] \\
 & \frac{(\alpha_1+1)\varepsilon_1 - (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr}{b_1 z_{1t}} K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr]\tau} \\
 & + \frac{1}{2} z_{1t} \left[K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi) \right] \\
 & \frac{(\alpha_1+1)\varepsilon_1 - (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr}{b_1 z_{1t}} K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr]\tau}
 \end{aligned} \tag{4.80}$$

In der gleichen Weise wird die Lösung für den Neutronenstrom j zusammengesetzt. Die einzelnen Teile Lösung sind in der Gleichung (4.31) nachzulesen. Der Neutronenstrom in der Zeitskala der prompten Neutronenproduktion j_0 ergibt sich aus den Gleichungen (4.37) und (4.57) oder aus (4.44) und (4.57). Der Neutronenstrom in der Zeitskala des Zerfalls der Vorläuferkerne der ersten Gruppe verzögerter Neutronen j_1 ergibt sich aus den Gleichungen (4.64), oder (4.70) und den Lösungen (4.76). Der Neutronenstrom in der Zeitskala des Zerfalls der Vorläuferkerne der zweiten Gruppe verzögerter Neutronen j_2 ergibt sich aus den Gleichungen (4.65),

oder (4.71) und den Lösungen (4.77). Werden diese Gleichungen alle zusammengefügt, ergeben sich für den gesamten Neutronenstrom j die folgenden Gleichungen:

- für $a_k < 0$:

$$\begin{aligned}
 j = j_0 + \varepsilon_1 j_1 + \varepsilon_2 j_2 = j_e & \left(K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) D_0 e^{\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2} e^{e_e \tau_0} \\
 & + \varepsilon_1 j_e \left(K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) A_1 e^{e_e \tau_0} \\
 & + \varepsilon_1 z_{2e} \left(K_{d1} e^{e_a \xi} - K_{d2} e^{-e_a \xi} \right) \\
 & \left(K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr]\tau} + K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr]\tau} \right) \\
 & + \varepsilon_2 j_e \left(K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) A_2 e^{e_e \tau_0} \\
 & + \frac{1}{2} z_{2e} \left(K_{d1} e^{e_a \xi} - K_{d2} e^{-e_a \xi} \right) \frac{(\alpha_1+1)\varepsilon_1 - (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr}{b_1 z_{1e}} K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr]\tau} \\
 & + \frac{1}{2} z_{2e} \left(K_{d1} e^{e_a \xi} - K_{d2} e^{-e_a \xi} \right) \frac{(\alpha_1+1)\varepsilon_1 - (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr}{b_1 z_{1e}} K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr]\tau}
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

- für $a_k < 0$:

$$\begin{aligned}
 j = j_0 + \varepsilon_1 j_1 + \varepsilon_2 j_2 = j_t & \left[K_{x1} \sin(x_t \xi) - K_{x2} \cos(x_t \xi) \right] D_0 e^{\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2} e^{e_t \tau_0} \\
 & + \varepsilon_1 j_t \left[K_{x1} \sin(x_t \xi) - K_{x2} \cos(x_t \xi) \right] A_1 e^{e_t \tau_0} \\
 & + \varepsilon_1 z_{2t} \left[K_{d1} \sin(x_t \xi) - K_{d2} \cos(x_t \xi) \right] \\
 & \left(K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr]\tau} + K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr]\tau} \right) \\
 & + \varepsilon_2 j_t \left[K_{x1} \sin(x_t \xi) - K_{x2} \cos(x_t \xi) \right] A_2 e^{e_t \tau_0} \\
 & + \frac{1}{2} z_{2t} \left[K_{d1} \sin(x_t \xi) - K_{d2} \cos(x_t \xi) \right] \\
 & \frac{(\alpha_1+1)\varepsilon_1 - (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr}{b_1 z_{1t}} K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr]\tau} \\
 & + \frac{1}{2} z_{2t} \left[K_{d1} \sin(x_t \xi) - K_{d2} \cos(x_t \xi) \right] \\
 & \frac{(\alpha_1+1)\varepsilon_1 - (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr}{b_1 z_{1t}} K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr]\tau}
 \end{aligned} \tag{4.82}$$

Die Gesamtlösung für die Konzentration der Vorläuferkerne c_1 und c_2 kann nach den Gleichungen (4.32) folgendermaßen zusammengesetzt werden. Werden in die Gleichungen (4.38) und (4.39), oder (4.45) und (4.46) die Lösungen für die Konstanten A_0 (Gl. (4.57)) und B_{10} (Gl. (4.60) mit (4.76)) oder B_{20} (Gl. (4.61) mit (4.77)) eingesetzt, ergeben sich:

- für $a_k < 0$:

$$\begin{aligned}
 c_1 = c_{10} = & \left(K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) \frac{b_1}{e_e} D_0 e^{\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2} e^{e_e \tau_0} \\
 & + \left(K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi} \right) \\
 & \left(K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1 + 1)\varepsilon_1 + (\alpha_2 + 1)\varepsilon_2 - sr]\tau} + K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1 + 1)\varepsilon_1 + (\alpha_2 + 1)\varepsilon_2 + sr]\tau} \right)
 \end{aligned} \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned}
 c_2 = c_{20} = & \left(K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) \frac{b_2}{e_e} D_0 e^{\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2} e^{e_e \tau_0} \\
 & - \left(K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi} \right) \\
 & \frac{a}{2} \frac{(\alpha_1 + 1)\varepsilon_1 - (\alpha_2 + 1)\varepsilon_2 + sr}{\varepsilon_2 b_1} K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1 + 1)\varepsilon_1 + (\alpha_2 + 1)\varepsilon_2 - sr]\tau} \\
 & - \left(K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi} \right) \\
 & \frac{a}{2} \frac{(\alpha_1 + 1)\varepsilon_1 - (\alpha_2 + 1)\varepsilon_2 - sr}{\varepsilon_2 b_1} K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1 + 1)\varepsilon_1 + (\alpha_2 + 1)\varepsilon_2 + sr]\tau}
 \end{aligned} \quad (4.84)$$

- für $a_k > 0$:

$$\begin{aligned}
 c_1 = c_{10} = & \left[K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi) \right] \frac{b_1}{e_t} D_0 e^{\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2} e^{e_t \tau_0} \\
 & + \left[K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi) \right] \\
 & \left(K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1 + 1)\varepsilon_1 + (\alpha_2 + 1)\varepsilon_2 - sr]\tau} + K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1 + 1)\varepsilon_1 + (\alpha_2 + 1)\varepsilon_2 + sr]\tau} \right)
 \end{aligned} \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned}
 c_2 = c_{20} = & \left[K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi) \right] \frac{b_2}{e_t} D_0 e^{\alpha_1 \tau_1 + \alpha_2 \tau_2} e^{e_t \tau_0} \\
 & - \left[K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi) \right] \\
 & \frac{a}{2} \frac{(\alpha_1 + 1)\varepsilon_1 - (\alpha_2 + 1)\varepsilon_2 + sr}{\varepsilon_2 b_1} K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1 + 1)\varepsilon_1 + (\alpha_2 + 1)\varepsilon_2 - sr]\tau} \\
 & - \left[K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi) \right] \\
 & \frac{a}{2} \frac{(\alpha_1 + 1)\varepsilon_1 - (\alpha_2 + 1)\varepsilon_2 - sr}{\varepsilon_2 b_1} K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1 + 1)\varepsilon_1 + (\alpha_2 + 1)\varepsilon_2 + sr]\tau}
 \end{aligned} \quad (4.86)$$

Abschließend müssen noch, wie auch bei der Lösung für die punktkinetischen Gleichungen, die Singularität behandelt und die Konstanten bestimmt werden. Nachdem die Exponenten für den Zeitablauf in der Näherungslösung der Diffusionsgleichung exakt die gleichen sind wie in der Lösung für die punktkinetischen Gleichungen, werden auch die Korrekturen direkt aus Abschnitt 3.1.2 übernommen (siehe Gl. (3.47), (3.48) und (3.49)).

Die Konstanten A_n werden festgelegt, die Konstanten D_0 , K_{B1} und K_{B2} müssen wie folgt mit Hilfe der Anfangsbedingungen n_0 und c_{0m} bestimmt werden:

$$A_1 = A_2 = 0 \quad (4.87)$$

$$D_0 = \frac{1 - a\phi_0 - \varepsilon\phi_0 + sq\phi_0 - 2(c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2)}{2sq} \quad (4.88)$$

$$K_{B1} = \frac{-2a\phi_0b_1 + 2D_0ab_1 - 2\varepsilon_1K_{B2}b_1 + K_{B2}a\varepsilon_1(\alpha_1 + 1) - K_{B2}a\varepsilon_2(\alpha_2 + 1) - K_{B2}asr}{2e_1b_1 - a\varepsilon_1(\alpha_1 + 1) + a\varepsilon_2(\alpha_2 + 1) - asr} \quad (4.89)$$

$$K_{B2} = -\frac{1}{2} \frac{(\varepsilon_2(\alpha_2 + 1) - \varepsilon_1(\alpha_1 + 1))c_{01} - sr c_{01} - 2c_{02} \frac{b_1}{a} \varepsilon_2}{sr}. \quad (4.90)$$

Die Anfangsbedingungen definieren sich entweder im Laufe einer dynamischen Rechnung aus den Ergebnissen des vorhergehenden Rechenschrittes, oder können für den Beginn einer Rechnung aus dem stationären Zustand folgendermaßen hergeleitet, bzw. definiert werden: Die Anfangswerte im Falle eines stationären Systems lauten:

$$\begin{aligned} \phi(\xi, 0) &= \phi_0 \phi(\xi) \\ \phi_0 &= 1 \\ c_m(\xi, 0) &= c_{0m} c_m(\xi) \\ c_{0m} &= \frac{\beta_m}{\lambda_m \Lambda} \quad m = 1..2 \end{aligned}$$

Die Konstanten für die Funktionen der räumlichen Verteilung K_{x1} und K_{x2} können mit Hilfe der statischen Randbedingungen bestimmt werden.

4.2 Testrechnungen

Die ersten Testrechnungen für die Diffusionsgleichung mit zwei Gruppen verzögerter Neutronen werden für das bereits für die punktkinetischen Gleichungen eingeführte, willkürlich festgelegte Testsystem durchgeführt. Die Systemkonstanten sind aus Abschnitt 3.2 übernommen, nur die zusätzlich notwendigen Konstanten werden wie folgt definiert:

dimensionslose Konstante für den Neutronentransport	s_1	= 20
statischer Kritikalitätswert des unendlichen Systems	a_k	= ± 0.2

Die räumlichen Randbedingungen sind sehr einfach definiert. Sie sind diesem Fall einer unendlich ausgedehnten Platte mit uniformer Materialzusammensetzung in einer Vakuumumgebung entnommen.

Das bedeutet für den unterkritischen Fall $a_k < 0$:

- Symmetriebedingung in der Mitte mit Betrag 1
- Neutronenfluss geht gegen 0 für $x \rightarrow \infty$

und führt zu den Konstanten

$$\begin{aligned} K_{x1} &= 0 \\ K_{x2} &= 1 \end{aligned}$$

wobei im unterkritischen System zusätzlich eine Quelle ($S_0=2$) in der Form einer unendlich ausgedehnten Platte mit der Dicke 0 in der Mitte angenommen werden muss, um einen stationären Zustand zu erhalten.

Die Bedingungen für den kritischen, bzw. überkritischen Fall $a_k > 0$:

- Symmetriebedingung in der Mitte und
- kein Neutronenfluss am extrapolierten Rand

führen zu den Konstanten

$$K_{x1} = 1$$

$$K_{x2} = 0$$

Es werden in diesem Fall nur diese vereinfachten Definitionen angewendet, weil die Konstanten in einer Anwendung im Rahmen eines Rechenverfahrens für mehrere Zellen sowieso aus den Verknüpfungsbedingungen abgeleitet werden müssen. Die Konstanten K_{d1} und K_{d2} werden für beide Systeme den Konstanten K_{x1} und K_{x2} gleich gesetzt. Dies ist eine logische Konsequenz aus der Entwicklung der Näherungsformeln. Die räumliche Verteilung der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen folgt der räumlichen Verteilung des Neutronenflusses. Nachdem die räumliche Verteilung des Neutronenflusses über der Zeit konstant bleibt entsteht durch diese Festlegung im kinetischen Ablauf kein Fehler. Im Ablauf über mehrere kinetische Rechenschritte ist diese Festlegung natürlich nur eine Näherung.

In den Abbildungen, die in einer 3 dimensionalen Darstellung die berechneten Funktionen über Raum und Zeit wiedergeben, ist jeweils nur der hintere Teil ($x < 0$) gezeigt. Dies bietet bei vorausgesetzter Symmetrie den Vorteil, ohne Verlust von Information, den zeitlichen Verlauf der Funktionen zu verdeutlichen.

Die für die Diffusionsgleichung mit zwei Gruppen verzögerter Neutronen erzielten Ergebnisse dienen als Referenzlösung zum Vergleich mit den Näherungslösungen der folgenden Lösungen der P_1 und P_3 Neutronentransportgleichungen. Ein Vergleich der entwickelten Näherungslösung mit der analytischen Lösung braucht an dieser Stelle nicht durchgeführt werden. Die Qualität der Näherungslösung ist genauso exzellent, wie die Qualität der Näherungslösung für die punktkinetischen Gleichungen. Dies kann einfach begründet werden: nach einer Separation der Variablen zerfällt die zeitabhängige Diffusionsgleichung in eine Funktion für den Zeitablauf (kinetische Gleichung) und eine Funktion für die räumliche Neutronenverteilung (statische Verteilungsgleichung). Genau das gleiche Ergebnis erhält man durch die Entwicklung der Näherungslösung. Die kinetische Funktion wird lediglich anstatt, durch die exakte Lösung der kinetischen Gleichung, durch die bereits entwickelte Näherungslösung für die kinetische Gleichung ersetzt. Somit ist die entwickelte Näherungslösung nichts anderes als eine Kombination der exakten statischen, räumlichen Lösung mit der exzellenten Näherungslösung (siehe Abschnitt 3.2) für das zeitliche Verhalten. Im Vergleich der Referenzlösung (Diffusionsgleichung) mit den Näherungslösungen der P_1 und P_3 Neutronentransportgleichungen können somit Informationen über die Auswirkungen des Transporteffektes im räumlichen und zeitlichen Verlauf des Neutronenflusses gewonnen werden.

Die Ergebnisse der ersten Testrechnungen sind in Abb. 4-1 (Neutronenfluss), Abb. 4-2 (Neutronenstrom), Abb. 4-3 (Konz. d. Vorläuferkerne der 1. Gr. verz. Neutronen) und Abb. 4-4 (Konz. d. Vorläuferkerne der 2. Gr. verz. Neutronen) dargestellt.

Die Rechnungen wurden jeweils für zwei verschiedene Kritikalitätszustände ausgeführt. Diese verschiedenen Zustände führen zu den beiden grundverschiedenen räumlichen Verteilungen, einer Kosinusverteilung für den überkritischen Fall und einer Exponentialverteilung mit negativem Exponenten für den unterkritischen Fall. Hier gilt es zu bemerken, dass in beiden Fällen der Startzustand als stationär festgelegt ist. Dies bedeutet, dass für den überkritischen Fall die überzähligen Neutronen durch Verluste aus der Zelle verloren gehen. Für den unterkritischen Fall müssen im Gegensatz dazu Neutronen von außen zugeführt werden, dies kann zum Beispiel durch Zustrom aus einer benachbarten Rechenzelle, oder durch eine angrenzende externe Quelle geschehen.

Abb. 4-1 zeigt den räumlichen und zeitlichen Verlauf des Neutronenflusses ϕ als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \text{ \$}$). Die räumliche Verteilung des Neutronenflusses folgt, wie bereits angesprochen der statischen Neutronenflussverteilung – Kosinusverteilung im überkritischen und Exponentialverteilung im unterkritischen Fall. Der zeitliche Verlauf des Neutronenflusses ist unabhängig von der räumlichen Verteilung. Dies ist auch aufgrund der identischen Zeitfunktionen (vgl. Gl. (4.79) und Gl. (4.80)) in den Gleichungen zu erwarten. Die Zeitverläufe der Lösung der Diffusionsgleichung und der punktkinetischen Gleichung sind ebenfalls identisch (vgl. Abb. 3-6) wie auch die Funktionen, die für die punktkinetischen Gleichungen (Gl. (3.44)) hergeleitet wurden. Die Begründung hierfür wurde bereits im vorhergehenden Abschnitt

gegeben. Nachdem sich die Raumzeitverteilung des Neutronenflusses aus dem Produkt der Raumverteilung und der Zeitverteilung zusammensetzt, bleibt sowohl die räumliche Verteilung über der Zeit, als auch die zeitliche Verteilung über dem Raum konstant. Besonders anzusprechen ist noch der sehr unterschiedliche räumliche Gradient des Neutronenflusses. Dies kann im Falle des unterkritischen Systems zu großen Abweichungen in der Berechnung von lokale Mittelwerten führen. In einem realen Reaktor führt dies zu deutlichen Unterschieden zwischen dem Mittelwert und dem Maximalwert für die thermischen Belastung von Brennstäben in der Nähe eine starken Neutronenquelle.

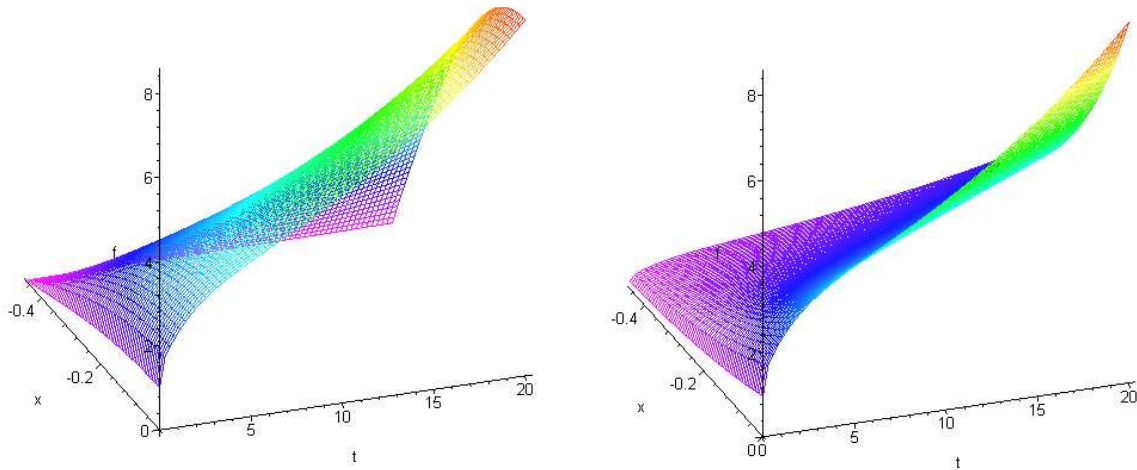


Abb. 4-1: Räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenflusses ϕ als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \text{ \$}$) für die Näherungslösung der Diffusionsgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

Der räumliche und zeitliche Verlauf des Neutronenstromes j ist in Abb. 4-2 dargestellt. Im überkritischen System (linke Abbildung) ist der Neutronenstrom in der Mitte des Systems über die gesamte Zeit gleich Null. Dies erklärt sich aus der vorgegebenen Symmetrierandbedingung. Im unterkritischen System ist das natürlich nicht der Fall, denn wie bereits beschrieben, müssen im unterkritischen Fall Neutronen zuströmen, um die stationären Anfangszustand zu erreichen. In der Mitte des Systems ist der Betrag des Neutronenstromes maximal. Im unterkritischen System steigt der absolute Betrag des Neutronenstromes im Zeitverlauf auch in der Mitte am stärksten an. Dies ist durch die Multiplikation der Zeit- und der Verteilungsfunktion zu erklären.

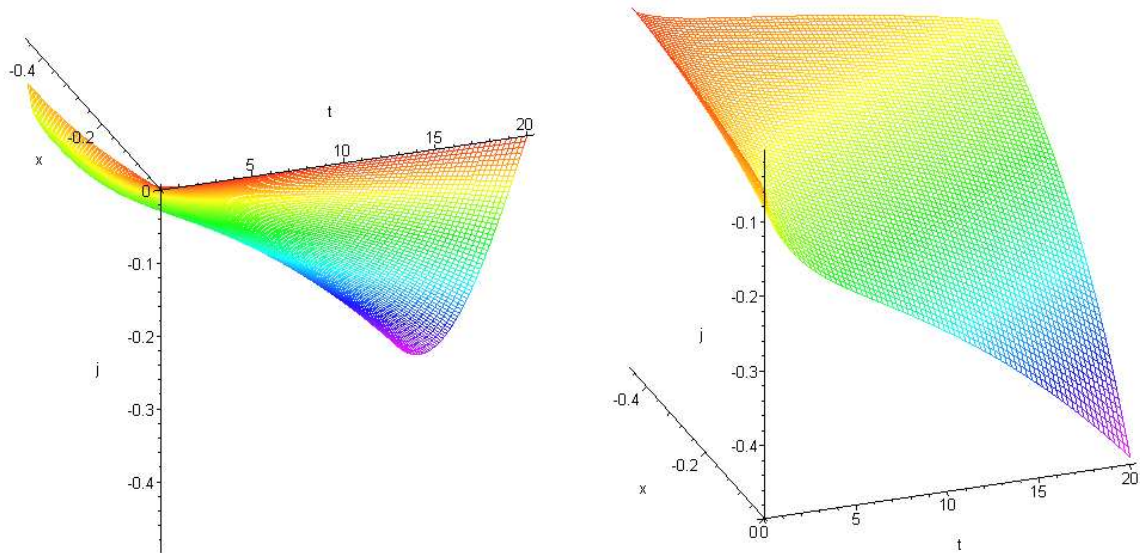


Abb. 4-2: Räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenstromes j als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) für die Näherungslösung der Diffusionsgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

Die räumliche und zeitliche Verteilung der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten Gruppe in der Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ist in Abb. 4-3 dargestellt. Die räumliche Verteilung der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen ist aufgrund der Wahl der Konstanten K_{d1} und K_{d2} direkt an die Neutronenflussverteilung gekoppelt. Die Gründe und Auswirkungen für die Wahl der Konstanten wurden am Beginn dieses Kapitels bereits dargelegt. Das Zeitverhalten ist, wie bereits auch für den Neutronenfluss festgestellt, identisch mit dem aus der Punktkinetik bekannten Zeitverhalten (vgl. Abb. 3-7 und Gl. (4.83) und Gl. (4.84) mit Gl. (3.45)).

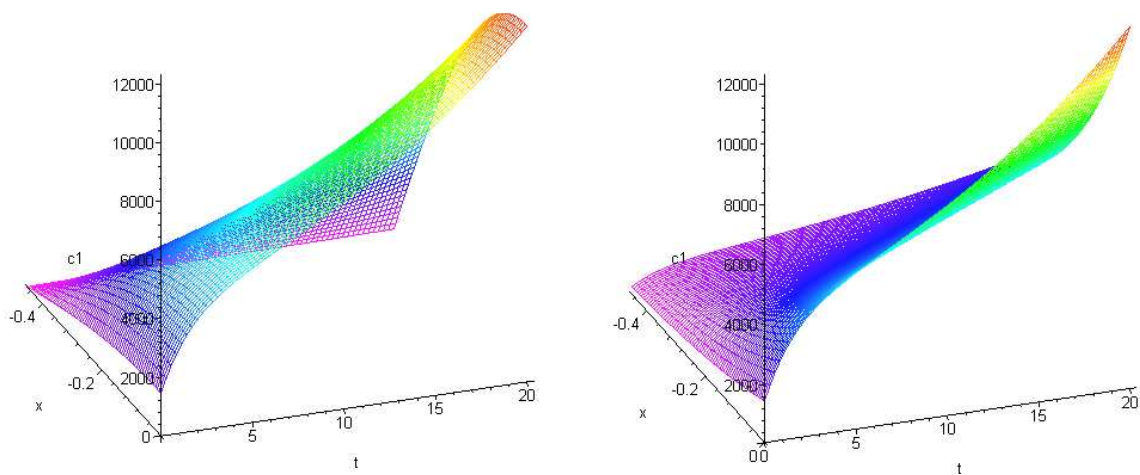


Abb. 4-3: Räumliche und zeitliche Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten Gruppe c_1 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) für die Näherungslösung der Diffusionsgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

Die räumliche und zeitliche Verteilung der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der zweiten Gruppe als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ist in Abb. 4-4 dargestellt. Die räumliche Verteilung ist wiederum von der Konstanten K_{d1} und K_{d2} abhängig und an die Neutronenflussverteilung gekoppelt. Das Zeitverhalten entspricht ebenfalls dem bekannten Zeitverhalten aus der Punktkinetik (vgl. Abb. 3-8 und Gl. (4.85) und Gl. (4.86) mit Gl. (3.46)).

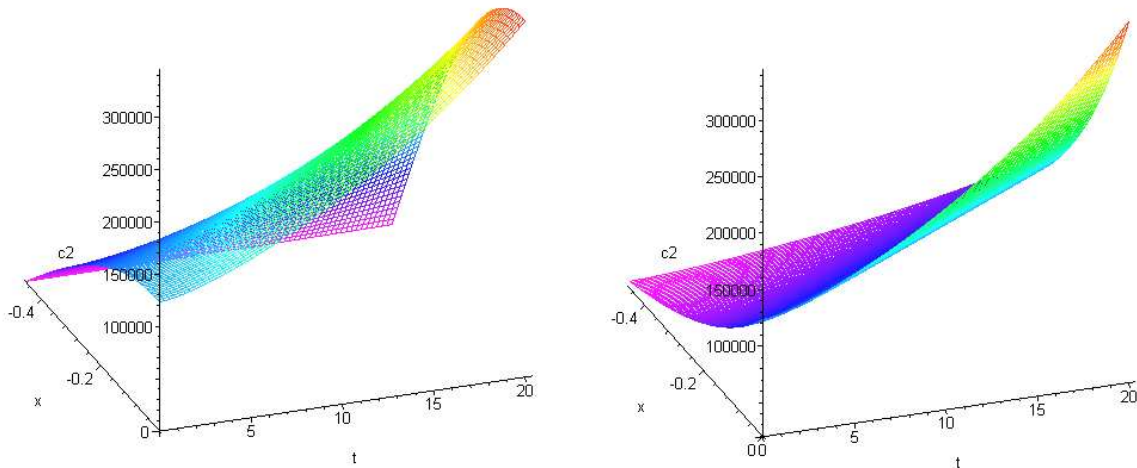


Abb. 4-4: Räumliche und zeitliche Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der zweiten Gruppe c_2 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) für die Näherungslösung der Diffusionsgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

In den folgenden Abbildungen sind die räumlichen und zeitlichen Verteilungen des Neutronenflusses ϕ (Abb. 4-5), des Neutronenstromes j (Abb. 4-6) und der Konzentrationen der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der beiden verwendeten Gruppen c_1 (Abb. 4-7) und c_2 (Abb. 4-8) als Folge einer prompt kritischen Reaktivitätsstörung dargestellt. Besonders bemerkenswert sind hier die sehr schnellen Anstiege des Neutronenflusses und des Neutronenstromes $\left(\frac{\phi_I}{\phi_0} \approx 80 \right)$. Die Konzentration der Vorläuferkerne der ersten Gruppe der verzögerten

Neutronen wird in dem kurzen dargestellten Zeitraum nur relativ schwach beeinflusst $\left(\frac{c_{1I}}{c_{10}} \approx 2 \right)$

und die Konzentration der Vorläuferkerne der zweiten Gruppe der verzögerten Neutronen bleibt im dargestellten Zeitraum annähernd konstant. Die zweite Gruppe würde erst beeinflusst, wenn die Transiente über einen längeren Zeitraum betrachtet würde.

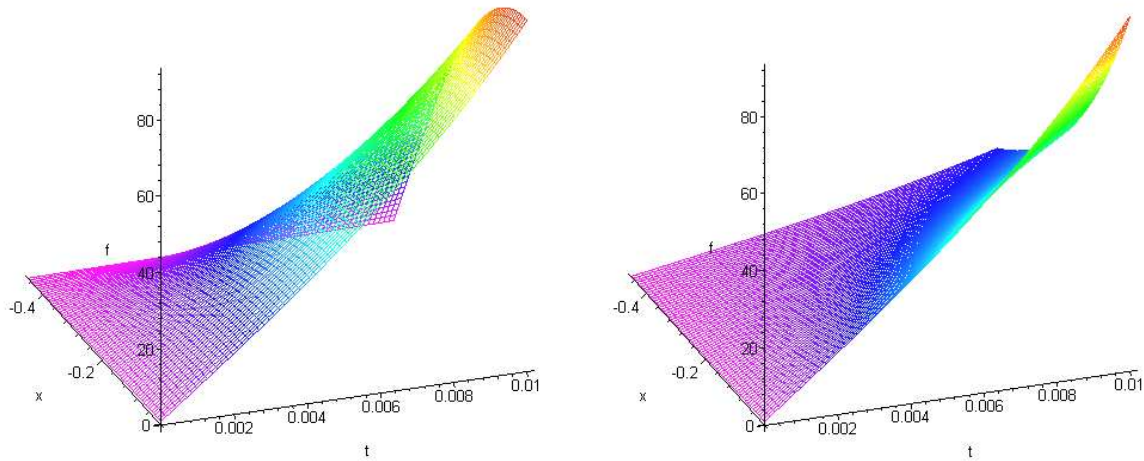


Abb. 4-5: Räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenflusses ϕ als Folge einer prompt kritischen Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$) für die Näherungslösung der Diffusionsgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $\alpha_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $\alpha_k = -0.2$

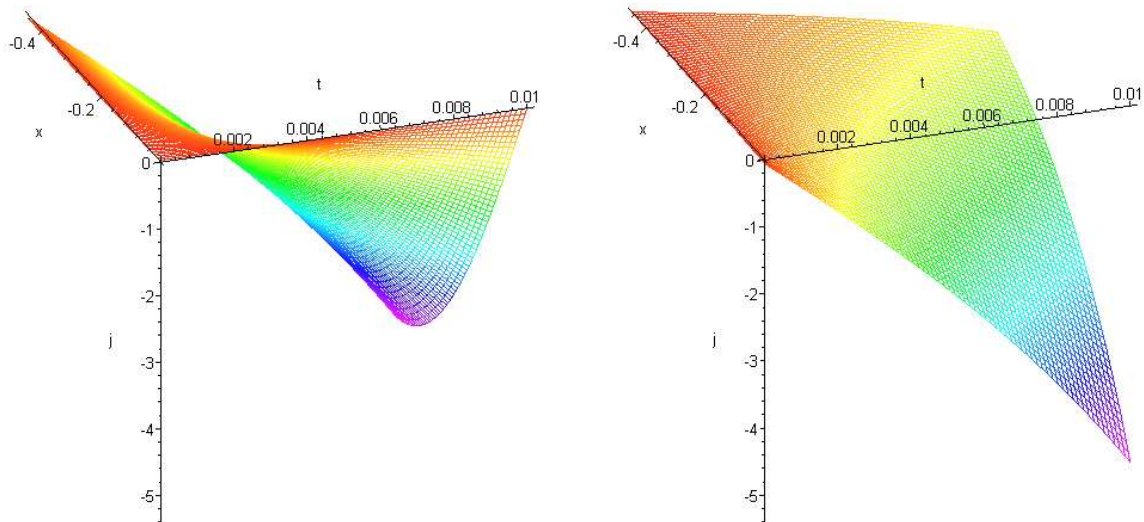


Abb. 4-6: Räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenstromes j als Folge einer prompt kritischen Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$) für die Näherungslösung der Diffusionsgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $\alpha_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $\alpha_k = -0.2$

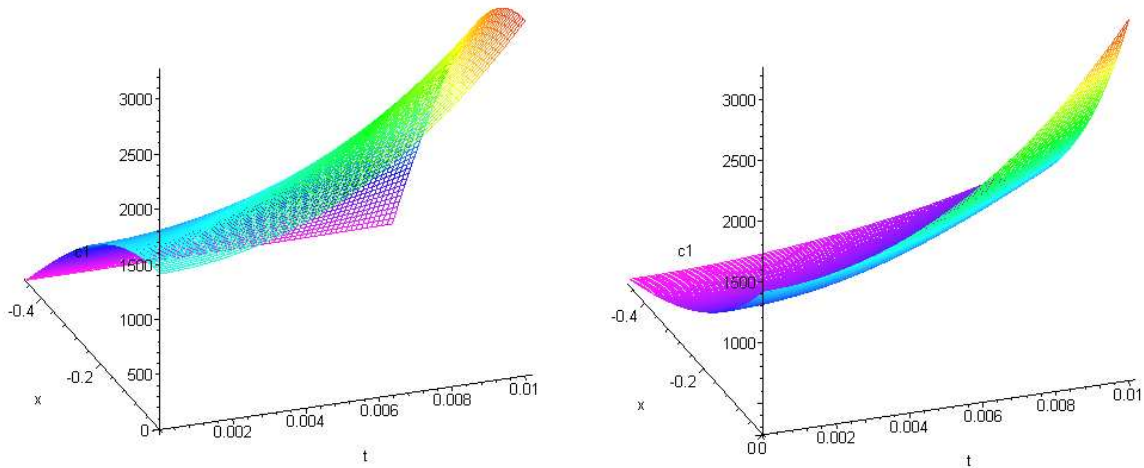


Abb. 4-7: Räumliche und zeitliche Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten Gruppe c_1 als Folge einer prompt kritischen Reaktivitätsstörung ($\rho = 1$ \$) für die Näherungslösung der Diffusionsgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

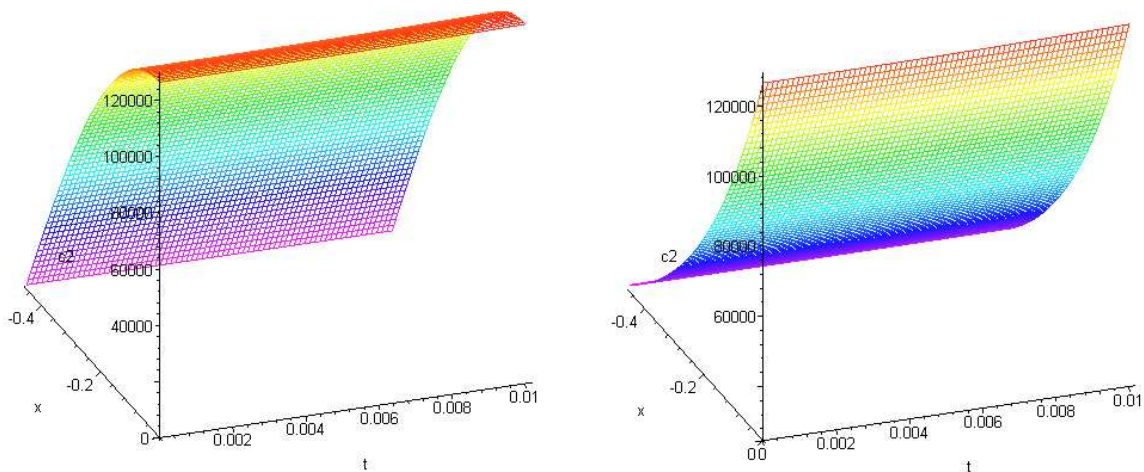


Abb. 4-8: Räumliche und zeitliche Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der zweiten Gruppe c_2 als Folge einer prompt kritischen Reaktivitätsstörung ($\rho = 1$ \$) für die Näherungslösung der Diffusionsgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

4.3 Zusammenfassung

Eine analytische Lösung für die zeitabhängige Diffusionsgleichung mit zwei Gruppen verzögerter Neutronen kann Hilfe einer Multiple Scale Expansion ohne die ansonsten übliche Trennung von Raum und Zeit erzielt werden. Ein Vergleich mit der exakten analytischen Lösung ergibt eine ebenso exzellente Übereinstimmung wie bereits für die Entwicklung der Expansionslösung der punktkinetischen Gleichung beschrieben. Die durch die Expansion gewonnenen Lösungen stimmen mit den bereits bekannten, durch Trennung von Raum und Zeit erhaltenen Lösungen sehr gut überein. Auch für die Diffusionsgleichung lässt sich also feststellen, dass die Multiple Scale Expansion eine sehr gute Möglichkeit bietet analytische Näherungsfunktionen für das raum-zeitverhalten eines multiplizierenden Systems mit verzögerter Neutronenproduktion zu entwickeln.

5 MULTIPLE SCALE EXPANSION DER P_1 NEUTRONENTRANSPORTGLEICHUNG

5.1 Entwicklung der analytischen Näherungsfunktionen

Nachdem die Entwicklung der Näherungslösungen für die punktkinetischen Gleichungen und die Diffusionsgleichung mit verzögerten Neutronen in den vorhergehenden Kapiteln durchgeführt wurde, folgt als nächster Schritt zu einer umfassenden Lösung der Neutronentransportgleichung die Entwicklung der Näherungslösung für die P_1 Neutronentransportgleichung. Für die P_1 Gleichungen mit mehreren Gruppen verzögerter Neutronen kann keine allgemeine analytische Lösung mehr gewonnen werden. Hier ist lediglich ein Vergleich der Expansionslösung mit der zuvor entwickelten Expansionslösung für die Diffusionsgleichung möglich. Als Startbedingung kann weiterhin auf die analytische Lösung der statischen P_1 Gleichung, die mit der statischen Lösung der Diffusionsgleichung identisch ist, zurückgegriffen werden. Ein wichtiger Schritt besteht in der detaillierten Betrachtung der Unterschiede, die vor allem im Zeitablauf zwischen den Näherungslösungen der P_1 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung bestehen.

5.1.1 Lösung der P_1 Transportgleichung mit einer Gruppe verzögerter Neutronen

Als Ausgangsgleichung für die Multiple Scale Expansion wird die zeitabhängige P_1 Neutronentransportgleichung mit n Gruppen verzögerter Neutronen verwendet ^{[138], [142]}.

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j(x,t)}{\partial x} + \Sigma_a \phi(x,t) = (1 - \beta) \nu \Sigma_f \phi(x,t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i(x,t) \quad (5.1)$$

$$\frac{1}{v} \frac{\partial j(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{3} \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} + \Sigma_{tr} j(x,t) = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial C_i(x,t)}{\partial t} = \beta \nu \Sigma_f \phi(x,t) - \lambda_i C_i(x,t), \quad i = 1, \dots, n \quad (5.3)$$

Der erste Schritt ist, wie auch bei den bisherigen Entwicklungen, die Bestimmung der exakten Lösung der P_1 Neutronentransportgleichung für das System mit einer Gruppe verzögerter Neutronen. Diese exakten Lösungen werden als Grundlage zur Verbesserung der durch Multiple Scale Expansion gewonnenen Näherungslösung und zur Bestimmung der Konstanten benötigt. Zuerst werden die beiden P_1 Transportgleichungen und die Gleichung für die Konzentration der Vorläuferkerne, in die für die Multiple Scale Expansion benötigte dimensionslose Form gebracht.

Die P_1 Transportgleichungen mit einer Gruppe verzögerter Neutronen und die Gleichung zur Bestimmung der Konzentration der Vorläuferkerne für die verzögerten Neutronen in dimensionsloser Schreibweise lauten:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial j}{\partial \xi} - (a_k + a)f = \varepsilon c \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial j}{\partial \tau} + \frac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial \xi} + s_I j = 0 \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = bf - \varepsilon c \quad (5.6)$$

Zur Vereinfachung des Gleichungssystems wurden die gleichen, zusammenfassenden Variablen wie für die Diffusionsgleichung eingeführt, siehe Gleichung (4.6) bis (4.14). Die dimensionslosen P₁ Gleichungen unterscheiden sich von der dimensionslosen Diffusionsgleichung lediglich durch den Term $\frac{\partial j}{\partial \tau}$. Das erklärt auch die identischen statischen Lösungen für die Diffusions- und die P₁ Gleichungen.

Als exakte Lösungen für das dimensionslose System bestehend aus den drei Differentialgleichungen (5.4), (5.5) und (5.6) ergibt sich:

- für $a_k < 0$:
eine Kombination aus zwei Exponentialfunktionen für die räumliche Verteilung des Neutronenflusses f , des Neutronenstromes j und der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen c und drei Exponentialfunktionen für das zeitliche Verhalten. Alle fünf Exponentialfunktionen sind jeweils mit einer Konstanten (K_{x1} , K_{x2} , K_{t1} , K_{t2} , K_{t3}) multipliziert.

$$\begin{aligned} f(\xi, \tau) = & \left(K_{x1} e^{\sqrt{-3a_k s_I} \xi} + K_{x2} e^{-\sqrt{-3a_k s_I} \xi} \right) K_{t1} e^{\frac{-\sqrt{-3a_k s_I} + 3s_I Z_1}{3Z_1} \tau} \\ & + \left(K_{x1} e^{\sqrt{-3a_k s_I} \xi} + K_{x2} e^{-\sqrt{-3a_k s_I} \xi} \right) K_{t2} e^{\frac{-\sqrt{-3a_k s_I} + 3s_I Z_2}{3Z_2} \tau} \\ & + \left(K_{x1} e^{\sqrt{-3a_k s_I} \xi} + K_{x2} e^{-\sqrt{-3a_k s_I} \xi} \right) K_{t3} e^{\frac{-\sqrt{-3a_k s_I} + 3s_I Z_3}{3Z_3} \tau} \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} j(\xi, \tau) = & j_{c1} \left(K_{x1} e^{\sqrt{-3a_k s_I} \xi} - K_{x2} e^{-\sqrt{-3a_k s_I} \xi} \right) K_{t1} e^{\frac{-\sqrt{-3a_k s_I} + 3s_I Z_1}{3Z_1} \tau} \\ & + j_{c2} \left(K_{x1} e^{\sqrt{-3a_k s_I} \xi} - K_{x2} e^{-\sqrt{-3a_k s_I} \xi} \right) K_{t2} e^{\frac{-\sqrt{-3a_k s_I} + 3s_I Z_2}{3Z_2} \tau} \\ & + j_{c3} \left(K_{x1} e^{\sqrt{-3a_k s_I} \xi} - K_{x2} e^{-\sqrt{-3a_k s_I} \xi} \right) K_{t3} e^{\frac{-\sqrt{-3a_k s_I} + 3s_I Z_3}{3Z_3} \tau} \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} c(\xi, \tau) = & c_{c1} \left(K_{x1} e^{\sqrt{-3a_k s_I} \xi} + K_{x2} e^{-\sqrt{-3a_k s_I} \xi} \right) K_{t1} e^{\frac{-\sqrt{-3a_k s_I} + 3s_I Z_1}{3Z_1} \tau} \\ & + c_{c2} \left(K_{x1} e^{\sqrt{-3a_k s_I} \xi} + K_{x2} e^{-\sqrt{-3a_k s_I} \xi} \right) K_{t2} e^{\frac{-\sqrt{-3a_k s_I} + 3s_I Z_2}{3Z_2} \tau} \\ & + c_{c3} \left(K_{x1} e^{\sqrt{-3a_k s_I} \xi} + K_{x2} e^{-\sqrt{-3a_k s_I} \xi} \right) K_{t3} e^{\frac{-\sqrt{-3a_k s_I} + 3s_I Z_3}{3Z_3} \tau} \end{aligned} \quad (5.9)$$

Zur einfacheren Lesbarkeit wurden die Konstanten Z_n eingeführt. Sie stehen für die Lösungen der folgenden Gleichung dritter Ordnung:

$$\begin{aligned} & \left(3s_I \sqrt{-3a_k s_I} - 3\varepsilon \sqrt{-3a_k s_I} \right) Z^3 + \left(3\varepsilon s_I - 6a_k s_I + 3\varepsilon a_k - 3s_I a + 3b\varepsilon + 3a\varepsilon - 3s_I^2 \right) Z^2 \\ & + \left(-2s_I \sqrt{-3a_k s_I} - a_k \sqrt{-3a_k s_I} - a \sqrt{-3a_k s_I} + \varepsilon \sqrt{-3a_k s_I} \right) Z + a_k s_I = 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$j_{cn} = Z_n \quad n = 1..3 \quad (5.11)$$

$$c_{cn} = \frac{1}{3} \frac{3Z_n^2 \sqrt{-3a_k s_l} - 3Z_n a_k - 3Z_n a - \sqrt{-3a_k s_l} - 3s_l Z_n}{\varepsilon Z_n} \quad n = 1..3 \quad (5.12)$$

- für $a_k > 0$:
eine Kombination aus zwei trigonometrischen Funktionen für die räumliche Verteilung des Neutronenflusses f , des Neutronenstromes j und der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen c und drei Exponentialfunktionen für das zeitliche Verhalten. Sowohl die trigonometrischen Funktionen als auch die Exponentialfunktionen sind jeweils mit einer Konstanten (K_{x1} , K_{x2} , K_{t1} , K_{t2} , K_{t3}) multipliziert.

$$\begin{aligned} f(\xi, \tau) = & \left[K_{x1} \cos(\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} \xi) + K_{x2} \sin(\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} \xi) \right] K_{t1} e^{\frac{\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} - 3s_l Z_1}{3Z_1} \tau} \\ & + \left[K_{x1} \cos(\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} \xi) + K_{x2} \sin(\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} \xi) \right] K_{t2} e^{\frac{\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} - 3s_l Z_2}{3Z_2} \tau} \\ & + \left[K_{x1} \cos(\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} \xi) + K_{x2} \sin(\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} \xi) \right] K_{t3} e^{\frac{\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} - 3s_l Z_3}{3Z_3} \tau} \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} j(\xi, \tau) = & j_{c1} \left[K_{x1} \sin(\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} \xi) - K_{x2} \cos(\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} \xi) \right] K_{t1} e^{\frac{\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} - 3s_l Z_1}{3Z_1} \tau} \\ & + j_{c2} \left[K_{x1} \sin(\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} \xi) - K_{x2} \cos(\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} \xi) \right] K_{t2} e^{\frac{\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} - 3s_l Z_2}{3Z_2} \tau} \\ & + j_{c3} \left[K_{x1} \sin(\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} \xi) - K_{x2} \cos(\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} \xi) \right] K_{t3} e^{\frac{\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} - 3s_l Z_3}{3Z_3} \tau} \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} c(\xi, \tau) = & c_{c1} \left[K_{x1} \cos(\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} \xi) + K_{x2} \sin(\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} \xi) \right] K_{t1} e^{\frac{\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} - 3s_l Z_1}{3Z_1} \tau} \\ & + c_{c2} \left[K_{x1} \cos(\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} \xi) + K_{x2} \sin(\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} \xi) \right] K_{t2} e^{\frac{\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} - 3s_l Z_2}{3Z_2} \tau} \\ & + c_{c3} \left[K_{x1} \cos(\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} \xi) + K_{x2} \sin(\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} \xi) \right] K_{t3} e^{\frac{\sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} - 3s_l Z_3}{3Z_3} \tau} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Zur einfacheren Lesbarkeit wurden die Konstanten Z_n eingeführt. Sie stehen für die Lösungen der folgenden Gleichung dritter Ordnung:

$$\begin{aligned} & (3s_l \sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} - 3\varepsilon \sqrt{3} \sqrt{a_k s_l}) Z^3 + (3\varepsilon s_l - 6a_k s_l + 3\varepsilon a_k - 3s_l a + 3b\varepsilon + 3a\varepsilon - 3s_l^2) Z^2 \\ & + (2s_l \sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} + a_k \sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} + a \sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} - \varepsilon \sqrt{3} \sqrt{a_k s_l}) Z - a_k s_l = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$j_{cn} = Z_n \quad n = 1..3 \quad (5.17)$$

$$c_{cn} = \frac{1}{3} \frac{3Z_n^2 \sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} - 3Z_n a_k - 3Z_n a + \sqrt{3} \sqrt{a_k s_l} - 3s_l Z_n}{\varepsilon Z_n} \quad n = 1..3 \quad (5.18)$$

Die Exponenten, bzw. Argumente des räumlichen Lösungsteils der exakten Lösungen (5.7) bis (5.9) und (5.13) bis (5.15) stellen die materielle Flusswölbung (material buckling) im stationären Zustand ($\lambda_t = 0$) dar. Die Exponenten für das zeitliche Verhalten des Systems sind die Lösungen der charakteristischen Gleichungen (5.10) oder (5.16), die zeitlichen Konstanten (K_{tn}) müssen aus den Anfangswerten bestimmt werden. Bereits in dieser einfachen Form der P₁ Neutronentransportgleichung ist abzusehen, dass eine Lösung der raum-zeitabhängigen Neutronentransportgleichung nicht nur einen Einfluss auf die räumliche Verteilungsfunktion haben wird (siehe statische P₃ Lösung), der Neutronentransport hat auch eine direkte Auswirkung auf den Zeitablauf des Neutronenflusses infolge einer Störung.

Die drei verschiedenen Zeitkonstanten K_{tn} der Lösungen für den Neutronenfluss f (Gl. (5.7) und (5.13)), den Neutronenstrom j (Gl. (5.8) und (5.14)) und die Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen c (Gl. (5.9) und (5.15)) können mit den jeweiligen von a_k abhängigen Konstanten c_{cn} und j_{cn} folgendermaßen definiert werden:

$$K_{t1} = -\frac{j_0 c_{c1} - n_0 c_{c1} j_{c3} - c_0 j_{c1} + c_0 j_{c3} - j_0 c_{c3} + n_0 c_{c3} j_{c1}}{c_{c1} j_{c3} + c_{c2} j_{c1} - c_{c2} j_{c3} - c_{c3} j_{c1} - c_{c1} j_{c2} + c_{c3} j_{c2}} \quad (5.19)$$

$$K_{t2} = \frac{-n_0 c_{c2} j_{c3} + n_0 c_{c3} j_{c2} + c_0 j_{c3} - c_0 j_{c2} - j_0 c_{c3} + j_0 c_{c2}}{c_{c1} j_{c3} + c_{c2} j_{c1} - c_{c2} j_{c3} - c_{c3} j_{c1} - c_{c1} j_{c2} + c_{c3} j_{c2}} \quad (5.20)$$

$$K_{t3} = \frac{j_0 c_{c1} - n_0 c_{c1} j_{c2} - j_0 c_{c2} + n_0 c_{c2} j_{c1} + c_0 j_{c2} - c_0 j_{c1}}{c_{c1} j_{c3} + c_{c2} j_{c1} - c_{c2} j_{c3} - c_{c3} j_{c1} - c_{c1} j_{c2} + c_{c3} j_{c2}} \quad (5.21)$$

Die Anfangswerte im Falle eines stationären Systems lauten:

$$\phi(\xi, 0) = n_0 \phi(\xi)$$

$$n_0 = 1$$

$$j(\xi, 0) = j_0 j(\xi)$$

$$c(\xi, 0) = c_0 c(\xi)$$

$$c_0 = \frac{\beta}{\lambda \Lambda}$$

und

$$j_0 = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{-3a_k}{s_1}} \quad \text{für } a_k < 0$$

oder

$$j_0 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3a_k}{s_1}} \quad \text{für } a_k > 0$$

Die Konstanten für die Funktionen der räumlichen Verteilung K_{xn} können mit Hilfe der Randbedingungen durch die statischen Gleichungen bestimmt werden, oder ergeben sich aus den Übergangsbedingungen im Falle eines Systems mit mehreren Zellen.

Obwohl die Lösungen der P₁ Transportgleichung ((5.7) und (5.13)) und der Diffusionsgleichung ((4.15) und (4.17)) sehr unterschiedlich aussehen, reduziert sich für den Fall $a_k s_1 = 0$ die P₁ Transportgleichung auf die Diffusionsgleichung. Das bedeutet, dass für den Fall eines unendlich ausgedehnten, kritischen, homogenen Reaktors, d. h. ohne materielle Flusswölbung, sowohl das Raum- als auch das Zeitverhalten für die Diffusions- und die P₁ Transportgleichung

identisch sind. Für ein reales System ist der Anteil des Unterschiedes im Zeitverhalten, bedingt durch eine Änderung des statischen Kritikalitätszustandes, vernachlässigbar gering.

5.1.2 Lösung der P_1 Transportgleichung mit zwei Gruppen verzögerter Neutronen

Für die Multiple Scale Expansion der P_1 Neutronentransportgleichung mit zwei Gruppen verzögerter Neutronen und der Gleichungen für die Konzentrationen der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen wird das folgende dimensionslose Differentialgleichungssystem benötigt. Die Gleichungen repräsentieren den Neutronenfluss ϕ , den Neutronenstrom j und die Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_m .

Die Expansion muss auch in diesem Fall wieder in drei unterschiedliche Zeitskalen aufgeteilt werden, die Skala der prompten Neutronen Generation und die Skalen analog der beiden verschiedenen Zerfallskonstanten der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\partial j}{\partial \xi} - (a_k + a) \phi = \varepsilon_1 c_1 + \varepsilon_2 c_2 \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial j}{\partial \tau} + \frac{1}{3} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + s_1 j = 0 \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial c_m}{\partial \tau} = b_m \phi - \varepsilon_m c_m \quad m = 1..2 \quad (5.24)$$

Die dimensionslose Zeit τ wird analog der eingeführten Definition aus Abschnitt 4.1.1 übernommen (siehe Gl. (4.12)). Die angesprochenen 3 Zeitskalen für die Multiple Scale Expansion definieren sich aus der dimensionslosen Zeit τ und der Multiplikation der dimensionslosen Zeit τ mit den beiden kleinen Parametern ε_m , wie bereits in Abschnitt 4.1.2 festgelegt (siehe Gl. (4.26)).

Die zu expandierenden Variablen Neutronenfluss ϕ , Neutronenstrom j und die Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_m können aus der Entwicklung für die Diffusionsgleichung entnommen werden (siehe (4.27) bis (4.29)).

Der Operator der Zeitableitung $\frac{d}{d\tau}$ wird aus der Entwicklung für die punktkinetischen Gleichungen übernommen (Gl (3.20)).

Wird die Multiple Scale Expansion des Zeitparameters τ , Gleichung (4.26), nun auf die Variablen Neutronenfluss ϕ , Neutronenstrom j und die Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_m angewendet, so entstehen die folgenden unendlichen Reihen.

$$\phi = f_0 + \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2 + \varepsilon_1^2 f_3 + \varepsilon_2^2 f_4 + \dots \quad (5.25)$$

$$j = j_0 + \varepsilon_1 j_1 + \varepsilon_2 j_2 + \varepsilon_1^2 j_3 + \varepsilon_2^2 j_4 + \dots \quad (5.26)$$

$$c_m = c_{m0} + \varepsilon_1 c_{m1} + \varepsilon_2 c_{m2} + \varepsilon_1^2 c_{m3} + \varepsilon_2^2 c_{m4} + \dots \quad m = 1..2 \quad (5.27)$$

In den folgenden Schritten gilt es nun, die in den Gleichungen (5.25), (5.26) und eingeführten Koeffizienten f_x , j_x , c_{mx} zu bestimmen.

Im ersten Schritt sind die Gleichungen der Multiple Scale Expansion der 0. Ordnung in ε zu lösen. Diese Gleichungen spiegeln das Systemverhalten aufgrund der prompten Neutronenproduktion wieder.

Die gesamte Gleichung für die Multiple Scale Expansion erhält man durch Einsetzen der Gleichungen (3.20) und (5.25) bis (5.27) in die dimensionslosen Ursprungsgleichungen (5.22) bis (5.25). Zusammengefasst ergeben die Terme 0. Ordnung in ε folgende der Gleichungen für die Neutronenfluss f_0 , den Neutronenstrom j_0 und die Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_{m0} :

$$\frac{\partial f_0}{\partial \tau_0} + \frac{\partial j_0}{\partial \xi} - (a_k + a)f_0 = 0 \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial j_0}{\partial \tau_0} + \frac{1}{3} \frac{\partial f_0}{\partial \xi} + s_1 j_0 = 0 \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial c_{10}}{\partial \tau_0} = b_1 f_0 \quad (5.30)$$

$$\frac{\partial c_{20}}{\partial \tau_0} = b_2 f_0 \quad (5.31)$$

Die Lösungen dieses Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung geben Information über die Anpassung des prompten Neutronenflusses f_0 , des prompten Neutronenstromes j_0 und die Veränderung der Konzentration der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_{10} und c_{20} , die durch eine Störung verursacht werden.

Die Lösungen definieren sich folgendermaßen:

- für $a_k < 0$ ergibt sich eine Kombination aus Exponentialfunktionen in Raum und Zeit mit zugeordneten Konstanten

$$f_0 = \left(K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) A_{0n} e^{e_{en} \tau_0} \quad n = 1..2 \quad (5.32)$$

$$j_0 = \left(K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) j_{en} A_{0n} e^{e_{en} \tau_0} + C_0 e^{-s_1 \tau_0} \quad n = 1..2 \quad (5.33)$$

$$c_{10} = \left(K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) \frac{b_1}{e_{en}} A_{0n} e^{e_{en} \tau_0} + B_{10}(\xi) \quad n = 1..2 \quad (5.34)$$

$$c_{20} = \left(K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) \frac{b_2}{e_{en}} A_{0n} e^{e_{en} \tau_0} + B_{20}(\xi) \quad n = 1..2 \quad (5.35)$$

mit

$$e_a = \sqrt{-3a_k s_1} \quad (5.36)$$

$$j_{en} = Z_n \quad n = 1..2 \quad (5.37)$$

$$e_{en} = -Z_n e_a + a_k + a \quad n = 1..2 \quad (5.38)$$

Die eingeführten Variablen Z_n sind durch die folgende quadratische Gleichung bestimmt:

$$3Z^2 e_a + (-3a_k - 3s_I - 3a)Z - e_a = 0 \quad (5.39)$$

- für $a_k > 0$ ergibt sich eine Kombination aus trigonometrischen Funktionen im Raum und Exponentialfunktionen in der Zeit, jeweils mit zugeordneten Konstanten

$$f_0 = [K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi)] A_{0n} e^{e_m \tau_0} \quad n = 1..2 \quad (5.40)$$

$$j_0 = [K_{x1} \sin(x_t \xi) - K_{x2} \cos(x_t \xi)] j_{m0} A_{0n} e^{e_m \tau_0} + C_{0n} e^{-s_I \tau_0} \quad n = 1..2 \quad (5.41)$$

$$c_{10} = [K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi)] \frac{b_1}{e_m} A_{0n} e^{e_m \tau_0} + B_{10}(\xi) \quad n = 1..2 \quad (5.42)$$

$$c_{20} = [K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi)] \frac{b_2}{e_m} A_{0n} e^{e_m \tau_0} + B_{20}(\xi) \quad n = 1..2 \quad (5.43)$$

mit

$$x_t = \sqrt{3a_k s_I} \quad (5.44)$$

$$j_m = Z_n \quad n = 1..2 \quad (5.45)$$

$$e_m = -Z_n x_t + a_k + a \quad n = 1..2 \quad (5.46)$$

Die eingeführten Variablen Z_n sind durch die folgende quadratische Gleichung bestimmt:

$$3Z^2 x_t + (-3a_k - 3s_I - 3a)Z + x_t = 0 \quad (5.47)$$

Es gilt zu beachten, dass die zu bestimmenden Konstanten A_0 , B_{10} und B_{20} in τ_0 mit Hilfe der Gleichungen höherer Ordnung in ε und der Anfangswerte ermittelt werden müssen. A_0 , B_{10} und B_{20} sind bisher nur als konstant in Bezug auf τ_0 festgelegt, können aber durchaus Funktionen in Bezug auf τ_1 und τ_2 sein.

Im zweiten Schritt sind die Gleichungen der Multiple Scale Expansion der 1. Ordnung in ε zu lösen. Aus der gesamten Gleichung der Multiple Scale Expansion zusammengefasst ergeben die Terme 1. Ordnung in ε folgende Gleichungen für die Neutronenflüsse f_1 und f_2 , die Neutronenströme j_1 und j_2 und die Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_{m1} und c_{m2} .

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \frac{\partial f_1}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial f_2}{\partial \tau_0} + \varepsilon_1 \frac{\partial f_0}{\partial \tau_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial f_0}{\partial \tau_2} + \varepsilon_1 \frac{\partial j_1}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \frac{\partial j_2}{\partial \xi} \\ - \varepsilon_1 (a_k + a) f_1 - \varepsilon_2 (a_k + a) f_2 = \varepsilon_1 c_{10} + \varepsilon_2 c_{20} \end{aligned} \quad (5.48)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial j_1}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial j_2}{\partial \tau_0} + \varepsilon_1 \frac{\partial j_0}{\partial \tau_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial j_0}{\partial \tau_2} + \varepsilon_1 \frac{1}{3} \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \frac{1}{3} \frac{\partial f_2}{\partial \xi} + \varepsilon_1 s_I j_1 + \varepsilon_2 s_I j_2 = 0 \quad (5.49)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial c_{m1}}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial c_{m2}}{\partial \tau_0} + \varepsilon_1 \frac{\partial c_{m0}}{\partial \tau_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial c_{m0}}{\partial \tau_2} = \varepsilon_1 b_m f_1 + \varepsilon_2 b_m f_2 - \varepsilon_m c_{m0} \quad m = 1..2 \quad (5.50)$$

Die Gleichungen (5.48) und (5.49) enthalten gegenüber den Gleichungen (5.28) und (5.29) zusätzlich die Information über die Anpassung des Neutronenflusses f_1 und f_2 und des Neutronenstromes j_1 und j_2 aufgrund der Produktion verzögerter Neutronen im Zeithorizont τ_1 und τ_2 . Die Gleichungen (5.50) enthalten ebenfalls gegenüber den Gleichungen 0. Ordnung ((5.30) und (5.31)) die zusätzliche Information über die Veränderung der Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_{m1} und c_{m2} . Die Konzentrationsveränderungen entstehen aufgrund der Produktion von Vorläuferkernen durch verzögerte Neutronen und des Zerfalls von, bereits im Zeithorizont τ_0 produzierten, Vorläuferkernen im Zeithorizont τ_1 und τ_2 .

Die folgenden Herleitungsschritte bis zur Bestimmung der Lösungen für f_1 , f_2 usw. werden der Übersichtlichkeit halber nur für $a_k < 0$ durchgeführt, verlaufen aber für $a_k > 0$ analog.

Durch Einsetzen der im vorherigen Schritt bestimmten Lösungen (5.34), (5.35) und der abgeleiteten Lösung (5.32) erhält man folgende Gleichungen für die Neutronenpopulationen n_1 und n_2 und die Neutronenströme j_1 und j_2 :

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \frac{\partial f_1}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial f_2}{\partial \tau_0} + \varepsilon_1 \frac{\partial j_1}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \frac{\partial j_2}{\partial \xi} - \varepsilon_1 (a_k + a) f_1 - \varepsilon_2 (a_k + a) f_2 = \\ \varepsilon_1 \left(K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) \frac{b_1}{e_{en}} A_{0n} e^{e_{en} \tau_0} + \varepsilon_1 B_{10}(\xi) \\ + \varepsilon_2 \left(K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) \frac{b_2}{e_{en}} A_{0n} e^{e_{en} \tau_0} + \varepsilon_2 B_{20}(\xi) \\ - \varepsilon_1 \left(K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) \frac{\partial A_{0n}}{\partial \tau_1} e^{e_{en} \tau_0} - \varepsilon_2 \left(K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) \frac{\partial A_{0n}}{\partial \tau_2} e^{e_{en} \tau_0} \end{aligned} \quad (5.51)$$

$n = 1..2$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \frac{\partial j_1}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial j_2}{\partial \tau_0} + \varepsilon_1 \frac{1}{3} \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \frac{1}{3} \frac{\partial f_2}{\partial \xi} + \varepsilon_1 s_1 j_1 + \varepsilon_2 s_1 j_2 = \\ - \varepsilon_1 \left(K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) j_{en} \frac{\partial A_{0n}}{\partial \tau_1} e^{e_{en} \tau_0} - \varepsilon_1 \frac{\partial C_{0n}}{\partial \tau_1} e^{-s_1 \tau_0} \\ - \varepsilon_2 \left(K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) j_{en} \frac{\partial A_{0n}}{\partial \tau_2} e^{e_{en} \tau_0} - \varepsilon_2 \frac{\partial C_{0n}}{\partial \tau_2} e^{-s_1 \tau_0} \end{aligned} \quad (5.52)$$

$n = 1..2$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich Bedingungen zur Bestimmung der Unbekannten A_{0n} und C_{0n} aus den Gleichungen (5.32) bis (5.35). Nachdem die Neutronenpopulationen n_1 und n_2 nicht von τ_0 abhängig sein dürfen, ergeben sich folgende Gleichungen zur Bestimmung von A_{0n} und C_{0n} .

$$\varepsilon_1 \left(\frac{\partial A_{0n}}{\partial \tau_1} - \frac{b_1}{e_{en}} A_{0n} \right) + \varepsilon_2 \left(\frac{\partial A_{0n}}{\partial \tau_2} - \frac{b_2}{e_{en}} A_{0n} \right) = 0 \quad n = 1..2. \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \left(K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) j_{en} \frac{\partial A_{0n}}{\partial \tau_1} e^{e_{en} \tau_0} + \varepsilon_1 \frac{\partial C_{0n}}{\partial \tau_1} e^{-s_1 \tau_0} + \\ \varepsilon_2 \left(K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) j_{en} \frac{\partial A_{0n}}{\partial \tau_2} e^{e_{en} \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial C_{0n}}{\partial \tau_2} e^{-s_1 \tau_0} = 0 \quad n = 1..2 \end{aligned} \quad (5.54)$$

Die Lösung dieser Gleichung definiert die Unbekannten A_{0n} als Funktionen von τ_1 und τ_2 , ebendies gilt auch C_{0n} , denn der τ_0 Term kürzt sich beim Einsetzen von C_{0n} weg. Diese Lösungen gelten für $a_k < 0$ können aber problemlos auch für $a_k > 0$ weiterentwickelt werden. Dafür müssen lediglich die von a_k abhängigen Funktionen vertauscht werden. Die Unbekannte C_{0n} ist von a_k abhängig, definiert sich aber analog der Herleitung der Gleichung (5.56). Diese Funktion kürzt sich größtenteils mit der Lösung für j_0 , dadurch wird der Term für die Abhängigkeit des Neutronenstromes von der Produktion der prompten Neutronen eliminiert.

$$A_{0n}(\tau_1, \tau_2) = D_{0n} e^{\frac{b_1}{e_{en}} \tau_1 + \frac{b_2}{e_{en}} \tau_2} \quad n = 1..2 \quad (5.55)$$

$$C_{0n}(\tau_1, \tau_2) = -j_{en} D_{0n} e^{\frac{b_1}{e_{en}} \tau_1 + \frac{b_2}{e_{en}} \tau_2} e^{e_{en} + s_1 \tau_0} (K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi}) + C_{1n} \quad n = 1..2 \quad (5.56)$$

Die Gleichung (5.55) enthält Informationen über die Auswirkung der Produktion verzögerter Neutronen auf die Anpassung des Systems im kurzen Zeithorizont, damit dient diese Funktion der Verknüpfung der verschiedenen Zeitskalen τ_0 , τ_1 und τ_2 . In einer Lösung entspricht dies dem Zeitbereich der Produktion der prompten Neutronen und in der anderen Lösung dem Zeitbereich der Auswirkung des Neutronenstromes.

Unter Verwendung der Ergebnisse für A_{0n} und C_{0n} reduzieren sich die Gleichungen (5.51) und (5.52) folgendermaßen:

$$\varepsilon_1 \frac{\partial f_1}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial f_2}{\partial \tau_0} + \varepsilon_1 \frac{\partial j_1}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \frac{\partial j_2}{\partial \xi} - \varepsilon_1 (a_k + a) f_1 - \varepsilon_2 (a_k + a) f_2 = \varepsilon_1 B_{10}(\xi) + \varepsilon_2 B_{20}(\xi) \quad (5.57)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial j_1}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial j_2}{\partial \tau_0} + \varepsilon_1 \frac{1}{3} \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \frac{1}{3} \frac{\partial f_2}{\partial \xi} + \varepsilon_1 s_1 j_1 + \varepsilon_2 s_1 j_2 = 0 \quad (5.58)$$

mit

$$B_{10}(\xi) = b_{01e} (K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi}) \quad (5.59)$$

$$B_{20}(\xi) = b_{02e} (K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi}) \quad (5.60)$$

Die Definition für die räumliche Verteilung der verzögerten Neutronen wird wie bereits in Abschnitt 4.1.2 festgelegt und diskutiert weiterverwendet.

Die Lösung der Differentialgleichung ergibt folgende Ergebnisse für die Neutronenpopulationen n_1 und n_2 und die Neutronenströme j_1 und j_2 in den Zeitskalen des Zerfalls der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen.

Die Lösung lautet:

- für $a_k < 0$:

$$f_1 = (K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi}) A_{1n} e^{e_{en} \tau_0} + z_{1e} b_{01e} (K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi}) \quad n = 1..2 \quad (5.61)$$

$$f_2 = (K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi}) A_{2n} e^{e_{en} \tau_0} + z_{2e} b_{02e} (K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi}) \quad n = 1..2 \quad (5.62)$$

$$j_1 = (K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi}) j_{en} A_{1n} e^{e_{en} \tau_0} + z_{2e} b_{01e} (K_{d1} e^{e_a \xi} - K_{d2} e^{-e_a \xi}) \quad n = 1..2 \quad (5.63)$$

$$j_2 = (K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi}) j_{en} A_{2n} e^{e_{en} \tau_0} + z_{2e} b_{02e} (K_{d1} e^{e_a \xi} - K_{d2} e^{-e_a \xi}) \quad n = 1..2 \quad (5.64)$$

mit

$$z_{1e} = -\frac{1}{a} \quad (5.65)$$

$$z_{2e} = \frac{1}{3as_1} e_a \quad (5.66)$$

- für $a_k < 0$:

$$f_1 = [K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi)] A_{1n} e^{e_m \tau_0} + z_{1t} b_{01t} [K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi)] \quad n = 1..2 \quad (5.67)$$

$$f_2 = [K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi)] A_{2n} e^{e_m \tau_0} + z_{1t} b_{02t} [K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi)] \quad n = 1..2 \quad (5.68)$$

$$j_1 = [K_{x1} \sin(x_t \xi) - K_{x2} \cos(x_t \xi)] j_m A_{1n} e^{e_m \tau_0} + z_{2t} b_{01t} [K_{d1} \sin(x_t \xi) - K_{d2} \cos(x_t \xi)] \quad n = 1..2 \quad (5.69)$$

$$j_2 = [K_{x1} \sin(x_t \xi) - K_{x2} \cos(x_t \xi)] j_m A_{2n} e^{e_m \tau_0} + z_{2t} b_{02t} [K_{d1} \sin(x_t \xi) - K_{d2} \cos(x_t \xi)] \quad n = 1..2 \quad (5.70)$$

mit

$$z_{1t} = -\frac{1}{a} \quad (5.71)$$

$$z_{2t} = -\frac{1}{3as_1} x_t \quad (5.72)$$

In den folgenden Schritten müssen die Gleichungen der ersten Ordnung in ε zur Bestimmung der Veränderung der Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_{m1} und c_{m2} (Gl. (5.50)) gelöst werden.

Analog der Lösung für die punktkinetischen Gleichungen (Abschnitt 3.1.2) müssen die Ergebnisse für f_1 und f_2 , für c_{m0} und die abgeleiteten Ergebnisse für c_{m0} in die Gleichungen der ersten Ordnung für ε eingesetzt werden. Die entstehenden Gleichungen liefern dann die folgenden Bedingungen zur Bestimmung der Variablen b_{01} und b_{02} die Konstanten in τ_0 aber Funktionen in τ_1 und τ_2 sein können. Die Entwicklung verläuft identisch mit den Entwicklungen für die Diffusionsgleichung (siehe (4.74) bis **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**).

$$b_{01} = K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr]\tau} + K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr]\tau} \quad (5.73)$$

$$b_{02} = -\frac{a}{2} \frac{(\alpha_1 + 1)\varepsilon_1 - (\alpha_2 + 1)\varepsilon_2 + sr}{\varepsilon_2 b_1} K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1 + 1)\varepsilon_1 + (\alpha_2 + 1)\varepsilon_2 - sr]\tau} - \frac{a}{2} \frac{(\alpha_1 + 1)\varepsilon_1 - (\alpha_2 + 1)\varepsilon_2 - sr}{\varepsilon_2 b_1} K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1 + 1)\varepsilon_1 + (\alpha_2 + 1)\varepsilon_2 + sr]\tau} \quad (5.74)$$

Zur Vereinfachung sind hier die Variablen

$$sr = \sqrt{\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_2 - 2\varepsilon_2\alpha_2\varepsilon_1 + 2\varepsilon_1^2\alpha_1 + \varepsilon_2^2 + 2\varepsilon_2^2\alpha_2 - 2\varepsilon_2\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2^2\alpha_2^2 + 2\varepsilon_2\alpha_1\varepsilon_1\alpha_2 + \varepsilon_1^2\alpha_1^2} \quad (5.75)$$

eingeführt. Die Definition von α_m (Gl. (4.56)) ändert sich auch folgendermaßen zu α_m :

$$\alpha_m = \frac{b_m}{a} \quad m = 1..2 \quad (5.76)$$

Somit führen diese Ergebnisse für die Repräsentation der verzögerten Neutronen wieder zurück auf das Ergebnis für die Diffusionslösung. An dieser Stelle wird die Expansion, aus den bereits im Abschnitt 4.1.2 erläuterten Gründen, abgebrochen. Die benötigten Konstanten K_{B1} und K_{B2} müssen mit Hilfe der Anfangsbedingungen bestimmt werden.

Abschließend müssen noch, wie auch bei der Lösung für die punktkinetischen Gleichungen, die Singularität behandelt und die Konstanten bestimmt werden. Nachdem die Exponenten für den Zeitablauf in der Näherungslösung der P_1 Gleichung annähernd die gleichen sind wie in der Lösung für die punktkinetischen Gleichungen, werden auch die Korrekturen direkt aus Abschnitt 3.1.2 übernommen (siehe Gl. (3.47), (3.48) und (3.49)) und die Exponenten der höheren Ordnungen vernachlässigt.

Die Gleichungen für b_{01} und b_{02} sind für die hier ermittelte Lösung für die P_1 Transportgleichung identisch mit den Gleichungen für die Lösung der Diffusionsgleichung, die im vorhergehenden Abschnitt ermittelt wurden. Dies bedeutet, dass das Langzeitverhalten der Näherungslösung, das durch die Änderung der Produktion der verzögerten Neutronen bestimmt wird, für die P_1 Transport- und die Diffusionsgleichung ebenfalls identisch sein wird.

Bevor die Gesamtlösungen zusammengesetzt werden, werden zur Vereinfachung die Konstanten A_{1n} , A_{2n} , C_{1n} folgendermaßen festgelegt:

$$A_{1n} = A_{2n} = 0 \quad n = 1..2 \quad (5.77)$$

$$C_{1n} = 0 \quad n = 1..2 \quad (5.78)$$

Die Gesamtlösung für den Neutronenfluss ϕ , kann Gleichung (5.25) folgend aus den einzelnen Lösungen zusammengesetzt werden. Der Neutronenfluss in der Zeitskala der prompten Neutronenproduktion f_0 ergibt sich aus den Gleichungen (5.32) oder (5.40) und jeweils (5.55). Der Neutronenfluss in der Zeitskala des Zerfalls der Vorläuferkerne der ersten Gruppe verzögerter Neutronen f_1 ergibt sich aus den Gleichungen (5.61) oder (5.67) und jeweils (5.73). Der Neutronenfluss in der Zeitskala des Zerfalls der Vorläuferkerne der zweiten Gruppe verzögerter Neutronen f_2 ergibt sich aus den Gleichungen (5.62) und (5.68) und jeweils (5.74). Werden diese Gleichungen alle zusammengefügt, ergeben sich für den gesamten Neutronenfluss ϕ folgenden Gleichungen:

- für $a_k < 0$:

$$\begin{aligned}
 \phi &= f_0 + \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2 = \\
 &\left(K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) \sum_n D_{0n} e^{\frac{b_1}{e_n} \tau_1 + \frac{b_2}{e_n} \tau_2} e^{e_n \tau_0} \\
 &+ \varepsilon_1 z_{1e} \left(K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi} \right) \\
 &\quad \left(K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr]\tau} + K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr]\tau} \right) \\
 &- \varepsilon_2 z_{1e} \left(K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi} \right) \\
 &\quad \frac{a}{2} \frac{(\alpha_1+1)\varepsilon_1 - (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr}{\varepsilon_2 b_1} K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr]\tau} \\
 &- \varepsilon_2 z_{1e} \left(K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi} \right) \\
 &\quad \frac{a}{2} \frac{(\alpha_1+1)\varepsilon_1 - (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr}{\varepsilon_2 b_1} K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr]\tau}
 \end{aligned} \tag{5.79}$$

$n = 1..2$

- für $a_k > 0$:

$$\begin{aligned}
 \phi &= f_0 + \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2 = \\
 &\left[K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi) \right] \sum_n D_{0n} e^{\frac{b_1}{e_m} \tau_1 + \frac{b_2}{e_m} \tau_2} e^{e_m \tau_0} \\
 &+ \varepsilon_1 z_{1t} \left[K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi) \right] \\
 &\quad \left(K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr]\tau} + K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr]\tau} \right) \\
 &- \varepsilon_2 z_{1t} \left[K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi) \right] \\
 &\quad \frac{a}{2} \frac{(\alpha_1+1)\varepsilon_1 - (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr}{\varepsilon_2 b_1} K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr]\tau} \\
 &- \varepsilon_2 z_{1t} \left[K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi) \right] \\
 &\quad \frac{a}{2} \frac{(\alpha_1+1)\varepsilon_1 - (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr}{\varepsilon_2 b_1} K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr]\tau}
 \end{aligned} \tag{5.80}$$

$n = 1..2$

In der gleichen Weise wird die Lösung für den Neutronenstrom j zusammengesetzt. Die einzelnen Teile Lösung sind in der Gleichung (5.26) nachzulesen. Der Neutronenstrom in der Zeitskala der prompten Neutronenproduktion j_0 ergibt sich aus den Gleichungen (5.33), oder (5.41) und jeweils (5.55) und (5.56). Der Neutronenstrom in der Zeitskala des Zerfalls der Vorläuferkerne der ersten Gruppe verzögerter Neutronen j_1 ergibt sich aus den Gleichungen (5.63), oder (5.69) und jeweils (5.73). Der Neutronenstrom in der Zeitskala des Zerfalls der Vorläuferkerne der zweiten Gruppe verzögerter Neutronen j_2 ergibt sich aus den Gleichungen (5.64), oder (5.70) und jeweils (5.74). Zu bemerken gilt hier, dass sich der j_0 Term beim Zusammenfügen der Gleichungen bis auf die Konstante C_{1n} aus dem C_{0n} Term wegekürzt. Werden diese Gleichungen alle zusammengefügt, ergeben sich für den gesamten Neutronenstrom j die folgenden Gleichungen:

- für $a_k < 0$:

$$\begin{aligned}
 j &= j_0 + \varepsilon_1 j_1 + \varepsilon_2 j_2 = \\
 &+ \varepsilon_1 z_{2e} \left(K_{d1} e^{e_a \xi} - K_{d2} e^{-e_a \xi} \right) \\
 &\quad \left(K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr]\tau} + K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr]\tau} \right) \\
 &- \varepsilon_2 z_{2e} \left(K_{d1} e^{e_a \xi} - K_{d2} e^{-e_a \xi} \right) \\
 &\quad \frac{a}{2} \frac{(\alpha_1+1)\varepsilon_1 - (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr}{\varepsilon_2 b_1} K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr]\tau} \\
 &- \varepsilon_2 z_{2e} \left(K_{d1} e^{e_a \xi} - K_{d2} e^{-e_a \xi} \right) \\
 &\quad \frac{a}{2} \frac{(\alpha_1+1)\varepsilon_1 - (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr}{\varepsilon_2 b_1} K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr]\tau}
 \end{aligned} \tag{5.81}$$

$n = 1..2$

- für $a_k > 0$:

$$\begin{aligned}
 j &= j_0 + \varepsilon_1 j_1 + \varepsilon_2 j_2 = \\
 &+ \varepsilon_1 z_{2t} \left[K_{d1} \sin(x_t \xi) - K_{d2} \cos(x_t \xi) \right] \\
 &\quad \left(K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr]\tau} + K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr]\tau} \right) \\
 &- \varepsilon_2 z_{2t} \left[K_{d1} \sin(x_t \xi) - K_{d2} \cos(x_t \xi) \right] \\
 &\quad \frac{a}{2} \frac{(\alpha_1+1)\varepsilon_1 - (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr}{\varepsilon_2 b_1} K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr]\tau} \\
 &- \varepsilon_2 z_{2t} \left[K_{d1} \sin(x_t \xi) - K_{d2} \cos(x_t \xi) \right] \\
 &\quad \frac{a}{2} \frac{(\alpha_1+1)\varepsilon_1 - (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr}{\varepsilon_2 b_1} K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr]\tau}
 \end{aligned} \tag{5.82}$$

$n = 1..2$

Die Gesamtlösung für die Konzentration der Vorläuferkerne c_1 und c_2 kann nach den Gleichungen (5.27) und (5.29) folgendermaßen zusammengesetzt werden. Werden in die Gleichungen (5.34) und (5.35), oder (5.42) und (5.43) jeweils die Lösungen für die Konstanten A_{0n} (Gl. (5.55)) entsprechend B_{10} (Gl. (5.73)) oder B_{20} (Gl. (5.74)) eingesetzt, ergeben sich:

- für $a_k < 0$:

$$\begin{aligned}
 c_1 &= c_{10} = \left(K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) \sum_n \frac{b_1}{e_{en}} D_{0n} e^{\frac{b_1}{e_{en}} \tau_1 + \frac{b_2}{e_{en}} \tau_2} e^{e_{en} \tau_0} \\
 &+ \left(K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi} \right) \\
 &\quad \left(K_{B1} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 - sr]\tau} + K_{B2} e^{-\frac{1}{2}[(\alpha_1+1)\varepsilon_1 + (\alpha_2+1)\varepsilon_2 + sr]\tau} \right)
 \end{aligned} \tag{5.83}$$

$n = 1..2$

$$\begin{aligned}
 c_2 = c_{20} = & \left(K_{x1} e^{e_d \xi} + K_{x2} e^{-e_d \xi} \right) \sum_n \frac{b_2}{e_{en}} D_{0n} e^{\frac{b_1}{e_m} \tau_1 + \frac{b_2}{e_m} \tau_2} e^{e_{en} \tau_0} \\
 & - \left(K_{d1} e^{e_d \xi} + K_{d2} e^{-e_d \xi} \right) \\
 & \frac{a}{2} \frac{(\alpha_1 + 1) \varepsilon_1 - (\alpha_2 + 1) \varepsilon_2 + sr}{\varepsilon_2 b_1} K_{B1} e^{-\frac{1}{2} [(\alpha_1 + 1) \varepsilon_1 + (\alpha_2 + 1) \varepsilon_2 - sr] \tau} \\
 & - \left(K_{d1} e^{e_d \xi} + K_{d2} e^{-e_d \xi} \right) \\
 & \frac{a}{2} \frac{(\alpha_1 + 1) \varepsilon_1 - (\alpha_2 + 1) \varepsilon_2 - sr}{\varepsilon_2 b_1} K_{B2} e^{-\frac{1}{2} [(\alpha_1 + 1) \varepsilon_1 + (\alpha_2 + 1) \varepsilon_2 + sr] \tau}
 \end{aligned} \tag{5.84}$$

$n = 1..2$

- für $a_k > 0$:

$$\begin{aligned}
 c_1 = c_{10} = & \left[K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi) \right] \sum_n \frac{b_1}{e_{tn}} D_{0n} e^{\frac{b_1}{e_m} \tau_1 + \frac{b_2}{e_m} \tau_2} e^{e_{tn} \tau_0} \\
 & + \left[K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi) \right] \\
 & \left(K_{B1} e^{-\frac{1}{2} [(\alpha_1 + 1) \varepsilon_1 + (\alpha_2 + 1) \varepsilon_2 - sr] \tau} + K_{B2} e^{-\frac{1}{2} [(\alpha_1 + 1) \varepsilon_1 + (\alpha_2 + 1) \varepsilon_2 + sr] \tau} \right)
 \end{aligned} \tag{5.85}$$

$n = 1..2$

$$\begin{aligned}
 c_2 = c_{20} = & \left[K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi) \right] \sum_n \frac{b_2}{e_{tn}} D_{0n} e^{\frac{b_1}{e_m} \tau_1 + \frac{b_2}{e_m} \tau_2} e^{e_{tn} \tau_0} \\
 & - \left[K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi) \right] \\
 & \frac{a}{2} \frac{(\alpha_1 + 1) \varepsilon_1 - (\alpha_2 + 1) \varepsilon_2 + sr}{\varepsilon_2 b_1} K_{B1} e^{-\frac{1}{2} [(\alpha_1 + 1) \varepsilon_1 + (\alpha_2 + 1) \varepsilon_2 - sr] \tau} \\
 & - \left[K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi) \right] \\
 & \frac{a}{2} \frac{(\alpha_1 + 1) \varepsilon_1 - (\alpha_2 + 1) \varepsilon_2 - sr}{\varepsilon_2 b_1} K_{B2} e^{-\frac{1}{2} [(\alpha_1 + 1) \varepsilon_1 + (\alpha_2 + 1) \varepsilon_2 + sr] \tau}
 \end{aligned} \tag{5.86}$$

$n = 1..2$

Die Konstanten D_{0n} , K_{B1} und K_{B2} müssen wie folgt mit Hilfe der Anfangsbedingungen n_0 , j_0 , c_{0m} bestimmt oder aus dem Abschnitt 5.1.1 übernommen werden:

$$D_{01} = K_{t3} \tag{5.87}$$

$$D_{02} = K_{t1} \tag{5.88}$$

$$K_{B1} = \frac{\left(2(K_{t1} + K_{t3}) a b_1 - 2 a n_0 b_1 - 2 \varepsilon_1 K_{B2} b_1 + K_{B2} a \varepsilon_1 (\alpha_1 + 1) - K_{B2} a \varepsilon_2 (\alpha_2 + 1) - K_{B2} a s r \right)}{\left(2 \varepsilon_1 b_1 - a \varepsilon_1 (\alpha_1 + 1) + a \varepsilon_2 (\alpha_2 + 1) - a s r \right)} \quad (5.89)$$

$$K_{B2} = -\frac{1}{2} \frac{(\varepsilon_2 (\alpha_2 + 1) - \varepsilon_1 (\alpha_1 + 1)) c_{01} - s r c_{01} - 2 c_{02} \frac{b_1}{a} \varepsilon_2}{s r} \quad (5.90)$$

Die Anfangsbedingungen definieren sich entweder im Laufe einer dynamischen Rechnung aus den Ergebnissen des vorhergehenden Rechenschrittes, oder können für den Beginn einer Rechnung aus dem stationären folgendermaßen hergeleitet werden.

Die Anfangswerte im Falle eines stationären Systems lauten:

$$\phi(\xi, 0) = n_0 \phi(\xi)$$

$$\phi_0 = 1$$

$$j(\xi, 0) = j_0 j(\xi)$$

$$c_m(\xi, 0) = c_{0m} c(\xi)$$

$$c_{0m} = \frac{\beta_m}{\lambda_m \Lambda} \quad m = 1..2$$

und

$$j_0 = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{-3a_k}{s_1}} \quad \text{für } a_k < 0$$

oder

$$j_0 = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{3a_k}{s_1}} \quad \text{für } a_k > 0$$

Die Konstanten für die Funktionen der räumlichen Verteilung K_{xn} können mit Hilfe der Randbedingungen durch die statischen Gleichungen bestimmt werden, oder ergeben sich aus den Übergangsbedingungen im Falle eines Systems mit mehreren Zellen.

5.2 Testrechnungen

Die ersten Testrechnungen für die Näherungslösung der P_1 Neutronentransportgleichung mit zwei Gruppen verzögerter Neutronen werden für das bereits für die punktkinetischen Gleichungen eingeführte, willkürlich festgelegte Testsystem durchgeführt. Die Systemkonstanten sind aus Abschnitt 3.2 und 4.2 übernommen. Die Konstanten für den räumlichen Verlauf der Neutronenflussverteilungen K_{x1} , K_{x2} und K_{d1} , K_{d2} sind ebenfalls aus dem Abschnitt 4.2 entnommen und wurden bereits dort diskutiert.

Die Ergebnisse der Testrechnungen für Näherungslösung für die P_1 Neutronentransportgleichung mit zwei Gruppen verzögerter Neutronen sind in den folgenden Abbildungen dargestellt. Abb. 5-1 zeigt die Entwicklung des Neutronenflusses in Raum und Zeit für zwei verschiedene Kritikalitätszustände bei einer vorgegebenen, positiven Störung von 0.3 \$. Abb. 5-2 zeigt die Entwicklung des Neutronenstromes; Abb. 5-3 die Entwicklung der Neutronenpopulation der ersten und Abb. 5-4 der zweiten Gruppe verzögerter Neutronen.

Die räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenflusses in der P_1 Näherung der Transportgleichung ist dem Ergebnis der Diffusionsgleichung sehr ähnlich. Dies erklärt sich daraus, dass die beiden statischen Gleichungen identisch sind und in den zeitabhängigen Gleichungen

lediglich der zeitliche Ableitungsterm des Neutronenstromes in der Diffusionsgleichung vernachlässigt wird. Solange die Gültigkeitsbedingungen für die Diffusionsgleichung eingehalten werden, insbesondere solange $\frac{1}{|j|} \frac{\partial |j|}{\partial t} \ll \nu(\Sigma_a + \Sigma_s)$ (vgl. [138]) gilt, bleiben die Unterschiede

begrenzt. Die exakten Unterschiede werden in Abb. 5-5, Abb. 5-6, Abb. 5-7 und Abb. 5-8 dargestellt und diskutiert.

Das räumliche und zeitliche Verhalten des Neutronenflusses in Abb. 5-1 zeigt das bereits aus der Lösung der punktkinetischen Gleichungen und der Diffusionsgleichung mit verzögerten Neutronen bekannte zeitliche Verhalten, bestehend aus dem Prompt Jump, der asymptotischen Annäherung aufgrund der ersten Gruppe verzögerter Neutronen und den exponentiellen Anstieg im Langzeitverhalten. Das räumliche Verhalten ist vom Kritikalitätszustand abhängig und wird entweder durch eine exponentielle oder eine trigonometrische (Kosinusverteilung) Verteilung, die aus den statischen Lösungen bekannt ist, dargestellt.

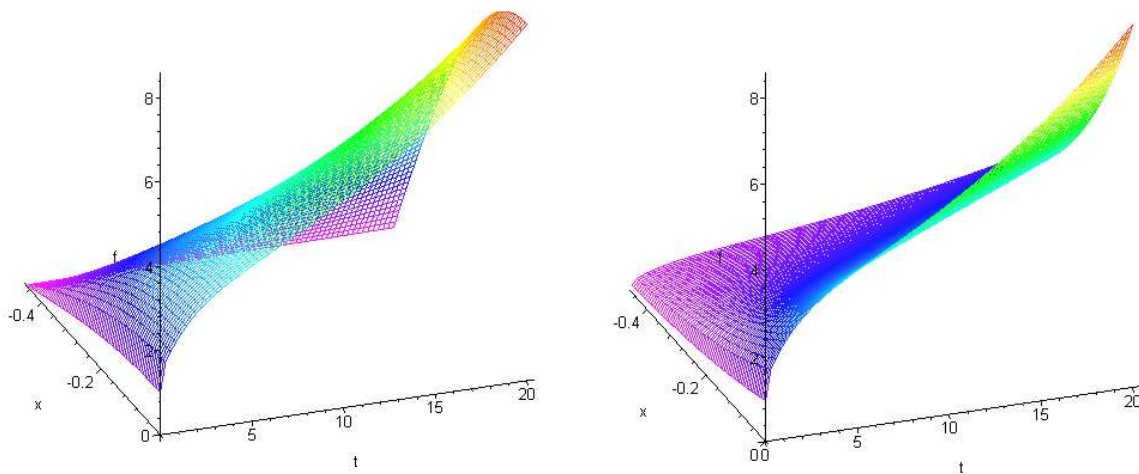


Abb. 5-1: Räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenflusses ϕ als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) für die Näherungslösung der P₁ Transportgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

Die räumliche Ableitung des Neutronenflusses ergibt den Neutronenstrom in Abb. 5-2. Dieser ist, aus den gleichen bereits für den Neutronenfluss angeführten Gründen, für die Lösung der P₁ Transportgleichung und die Diffusionsgleichung nahezu identisch. Aus der Entwicklung der Gleichungen ist allerdings bereits klar ersichtlich, dass sich im Bereich des Prompt Jump ein Unterschied abzeichnen muss (vgl. (4.81) und (4.82) mit (5.81) und (5.82)). Dieser Unterschied wird aber erst später, im direkten Vergleich deutlich.

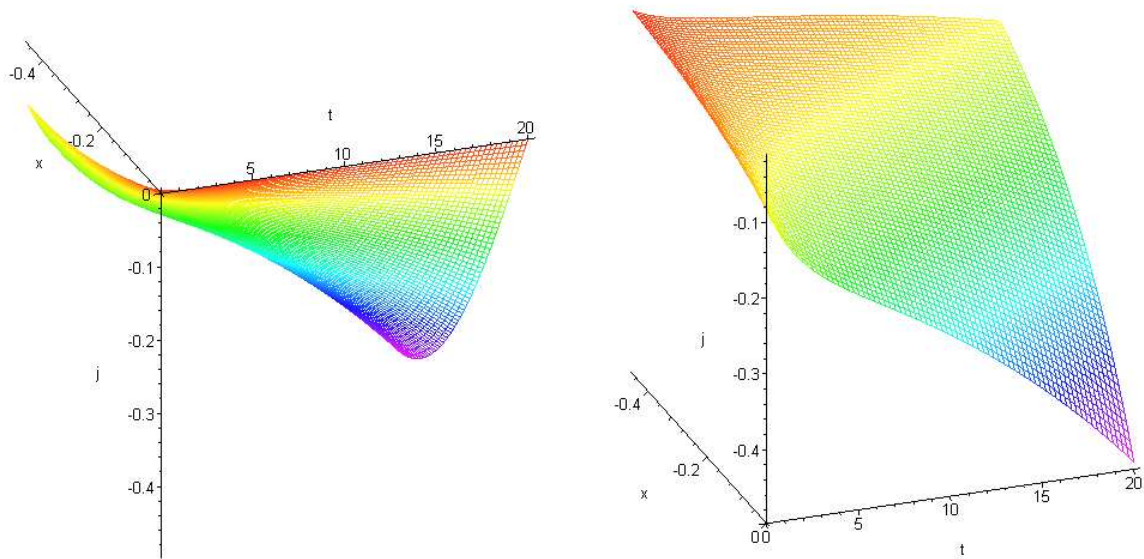


Abb. 5-2: Räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenstromes j als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) für die Näherungslösung der P_1 Transportgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

Die räumliche und zeitliche Veränderung der Konzentration der verzögerten Neutronen der ersten (Abb. 5-3) und zweiten (Abb. 5-4) Gruppe sind in den folgenden beiden Abbildungen dargestellt. Die räumliche Verteilung der verzögerten Neutronen ist für die Anfangsbedingung eines statischen Reaktors identisch mit der räumlichen Verteilung des Neutronenflusses. Der zeitliche Verlauf entspricht dem, bereits aus der Lösung der punktkinetischen Gleichungen und der Diffusionsgleichung, bekannten Verhalten.

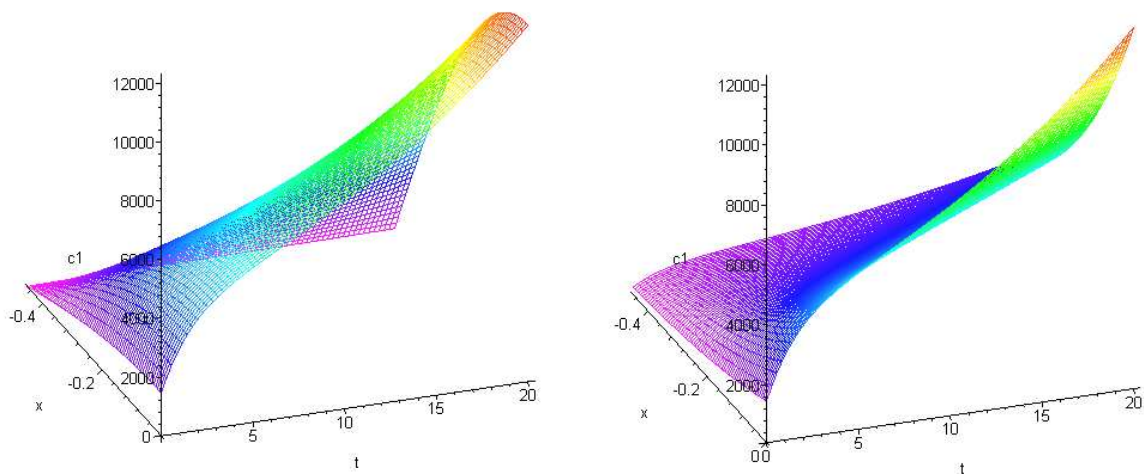


Abb. 5-3: Räumliche und zeitliche Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten Gruppe c_1 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) für die Näherungslösung der P_1 Transportgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

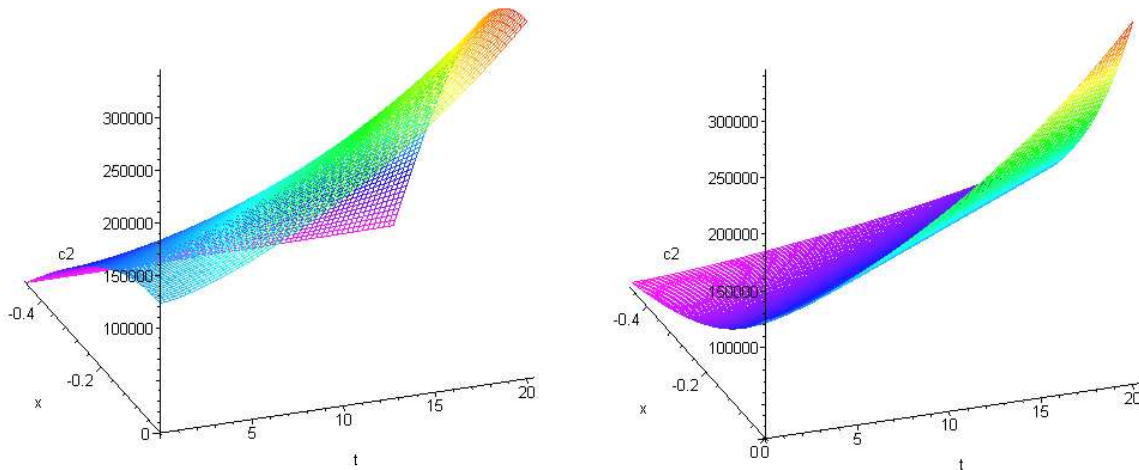


Abb. 5-4: Räumliche und zeitliche Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der zweiten Gruppe c_2 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) für die Näherungslösung der P_1 Transportgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

In Abb. 5-5 sind die Differenzen des Neutronenflusses ϕ zwischen der Näherungslösung der P_1 Gleichung und der Diffusionsgleichung dargestellt. Der positive bzw. negative Peak im Zeitbereich kleiner 0.001 s ist durch die erweiterte Lösungsstruktur der P_1 Lösung, verglichen mit der Diffusionslösung zu erklären. Dieser Peak ist als qualitativer Unterschied immer vorhanden, quantitativ ist der Peak natürlich sehr stark von den Systemparametern abhängig. Die Erklärung für dieses Verhalten liegt in der Lösung der P_1 Gleichung. Hier taucht ein zusätzlicher Exponentialterm mit sehr stark negativem Exponenten auf, der sehr schnell abklingt. Dieser zusätzlich Exponentialterm entsteht aufgrund der zeitlichen Veränderung des Neutronenstromes und gibt Auskunft über den Zeithorizont für die räumliche Ausbreitung einer lokalisierten Störung. Zusätzlich wird die aus dem Startwert bestimmte Konstante am kurzlebigen Term der Lösung der Diffusionsgleichung in der P_1 Gleichung in zwei Konstanten aufgeteilt. Die Betrag des Peaks ist von a_k abhängig und steigt mit steigendem Betrag von a_k an. Das zeitliche Verhalten der Differenz ist von den verschiedenen Zeitkonstanten (prompte Neutronenlebensdauer, Zerfallskonstanten der verzögerten Neutronen) des Systems abhängig. Das Verhalten für den längeren, durch das Verhalten verzögerten Neutronen bestimmten, Zeitbereich ist bis auf die Konstanten für beide Rechenverfahren identisch. Die geringen Unterschiede in den Konstanten bedingen den geringfügigen Unterschied, der auch nach längerer Zeit konstant erhalten bleibt. Die Konstanz ist durch die identische Reihenentwicklung zur Bestimmung der Exponenten der Näherungslösung, die für das Verhalten des Neutronenflusses aufgrund der Produktion der verzögerten Neutronen erklärbar.

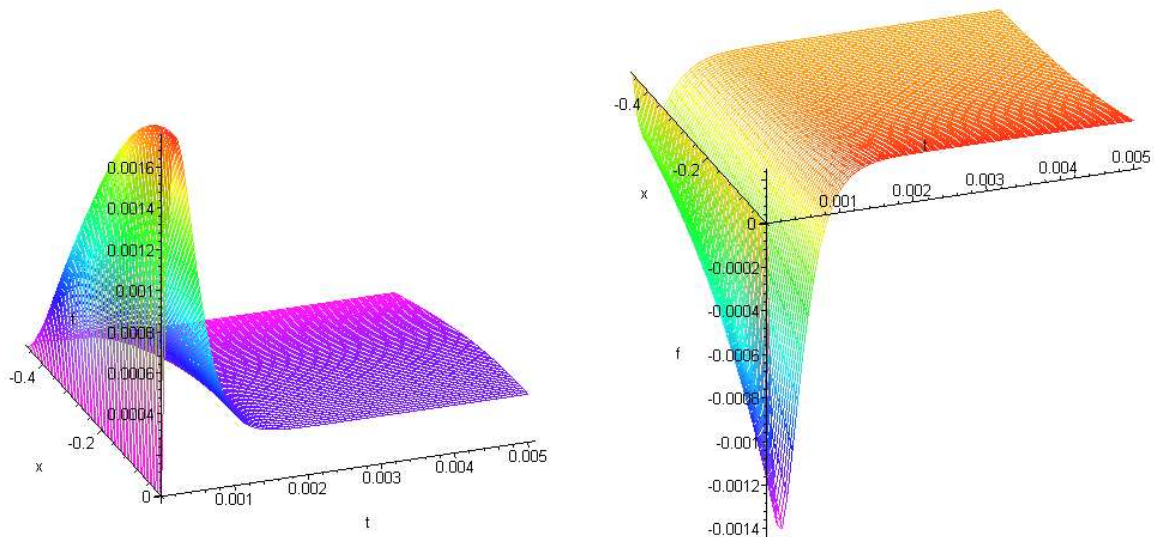


Abb. 5-5: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung des Neutronenflusses ϕ als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) zwischen den Näherungslösungen der P_1 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($f_{\text{trans}} - f_{\text{diff}}$)

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

Die Differenzen im Neutronenstrom zwischen Ergebnissen der Diffusions- und der P_1 Transportgleichung sind in Abb. 5-6 abgebildet. Die Differenzen im Neutronenstrom verhalten sich ähnlich den Differenzen im Neutronenfluss. Im sehr kurzen Zeitbereich < 0.01 s differiert das Zeitverhalten für die vorgegebenen Systemparameter, diese Differenz klingt aber schon nach kurzer Zeit fast vollkommen ab. Diese Differenz beträgt am Beginn der Transiente aber immerhin etwa 10 %. Sie liegt im bereits angesprochenen Unterschied in der Reihenentwicklung. Während sich in der Entwicklung für die P_1 Gleichung der Prompt Jump Term in den Gleichungen für j wegekürzt (siehe (5.81) und (5.82)), bleibt dieser Term in der Entwicklung der Näherungslösung für die Diffusionsgleichung (siehe (4.81) und (4.82)) erhalten.

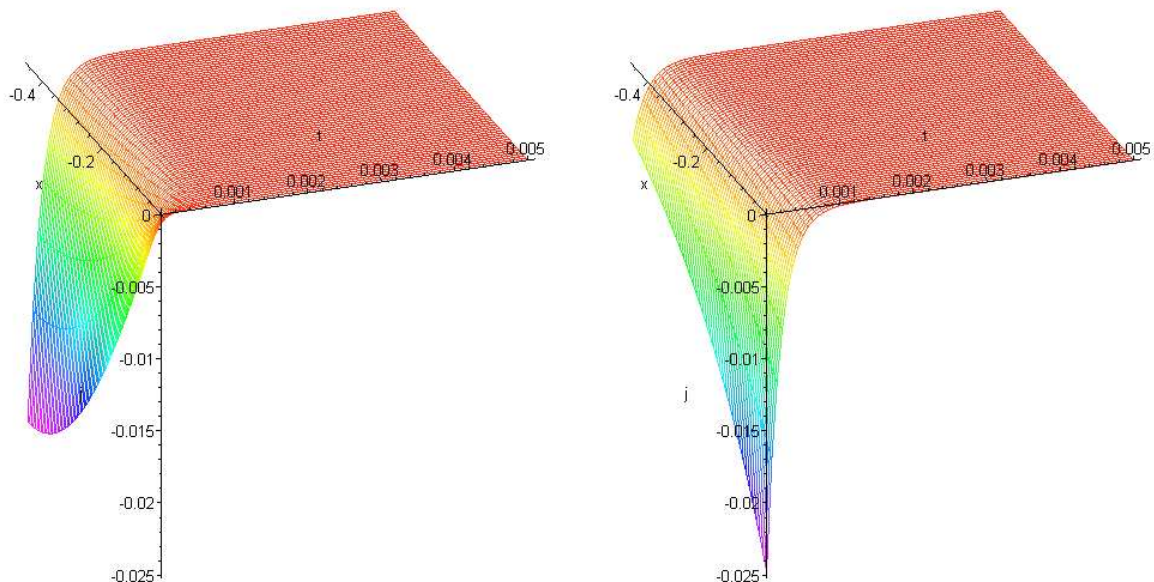


Abb. 5-6: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung des Neutronenstromes j als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) zwischen den Näherungslösungen der P_1 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($j_{\text{trans}} - j_{\text{diff}}$)

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

Die Differenzen zwischen den durch die Diffusionsgleichung und die P_1 Transportgleichung berechneten Konzentrationen der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten (Abb. 5-7)

5-7) und der zweiten (Abb. 5-8) Gruppe sind in den folgenden Abbildungen dargestellt. Wie bereits in der Diskussion der Differenzen im Neutronenfluss festgestellt, sind die zeitlichen Exponentialfunktionen die für die Beschreibung der verzögerten Neutronenpopulation für die Diffusions- und die P_1 Transportgleichung durch eine identische Reihenentwicklung bestimmt. Die Differenzen am Beginn der Rechnungen für beide Konzentrationen der Vorläuferkerne zeigen einen Unterschied im stationären Zustand. Dieser Unterschied entsteht allerdings nicht durch die Art der Gleichung (Diffusion oder P_1), sondern ausschließlich durch die geringfügig unterschiedlichen Konstanten der Lösung, die durch Näherungsansätze aus den identischen Anfangswerten bestimmt werden.

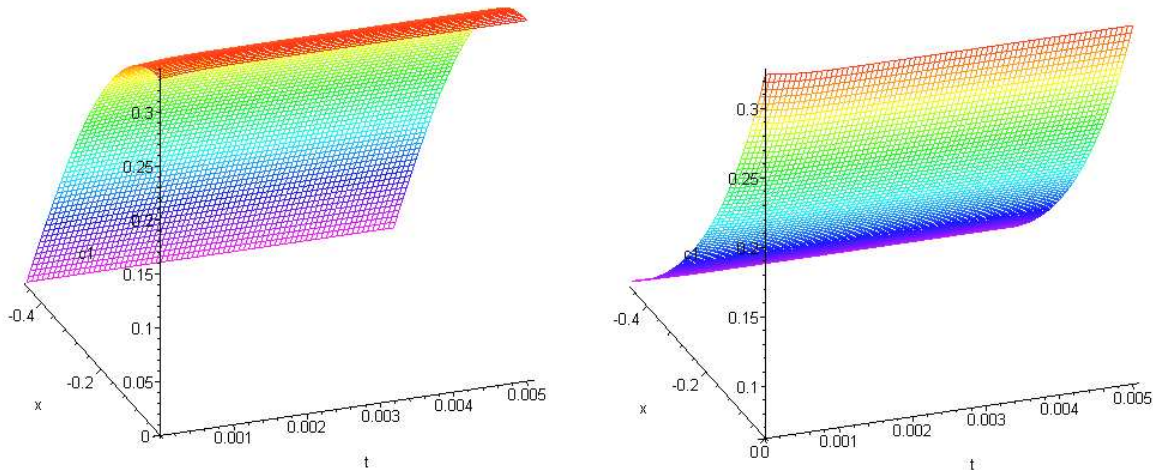


Abb. 5-7: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten Gruppe c_1 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) zwischen den Näherungslösungen der P_1 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($c_{1\text{trans}} - c_{1\text{diff}}$)

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

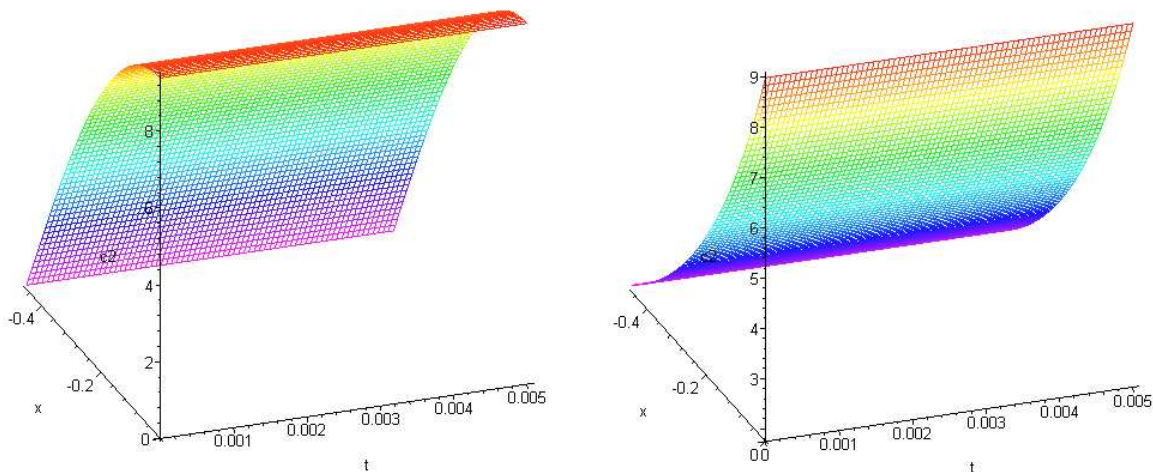


Abb. 5-8: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten Gruppe c_2 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) zwischen den Näherungslösungen der P_1 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($c_{2\text{trans}} - c_{2\text{diff}}$)

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

Die folgenden vier Abbildungen zeigen den Neutronenfluss (Abb. 5-9), den Neutronenstrom (Abb. 5-10) und die Konzentrationen der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten (Abb. 5-11) und der zweiten (Abb. 5-12) Gruppe für eine prompt kritische Reaktivitätsstörung (ρ

= 1 \$). Besonders bemerkenswert sind hier die sehr schnellen Anstiege des Neutronenflusses und des Neutronenstromes $\left(\frac{\phi_1}{\phi_0} \approx 80\right)$. Die Konzentration der Vorläuferkerne der ersten Gruppe der verzögerten Neutronen wird in dem kurzen dargestellten Zeitraum nur relativ schwach beeinflusst $\left(\frac{c_{11}}{c_{10}} \approx 2\right)$ und die Konzentration der Vorläuferkerne der zweiten Gruppe der verzögerten Neutronen bleibt im dargestellten Zeitraum annähernd konstant.

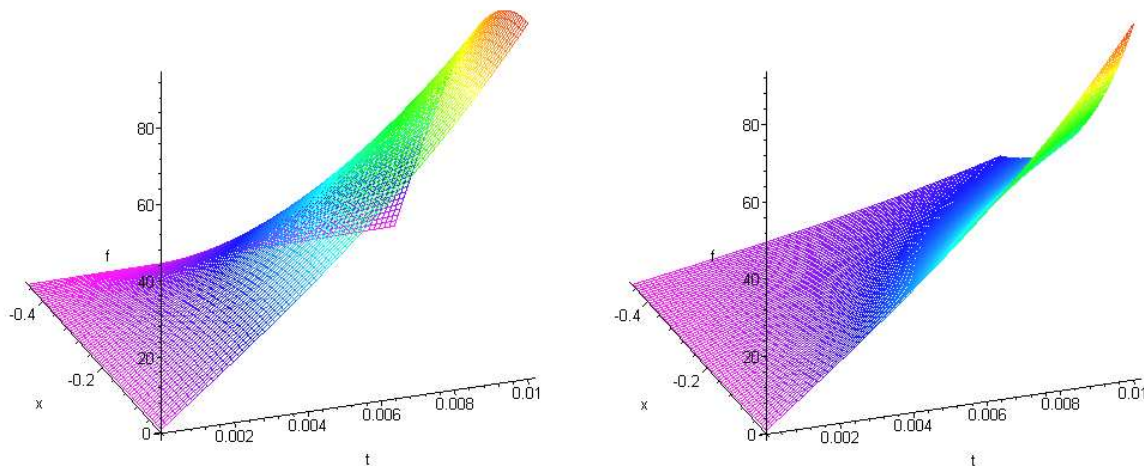


Abb. 5-9: Räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenflusses ϕ als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1$ \$) für die Näherungslösung der P_1 Transportgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $\alpha_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $\alpha_k = -0.2$

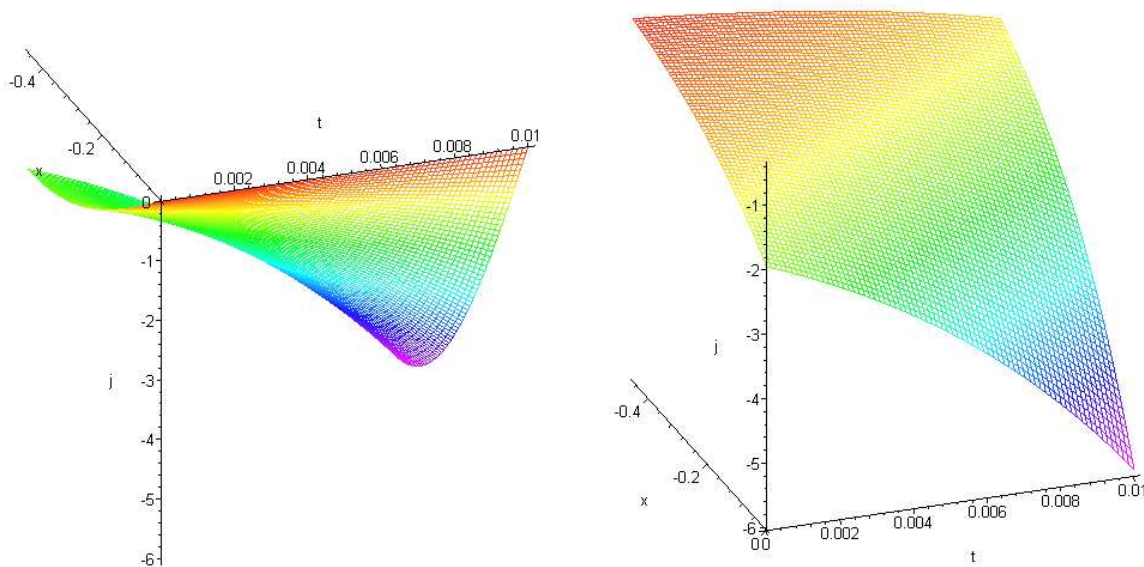


Abb. 5-10: Räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenstromes j als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1$ \$) für die Näherungslösung der P_1 Transportgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $\alpha_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $\alpha_k = -0.2$

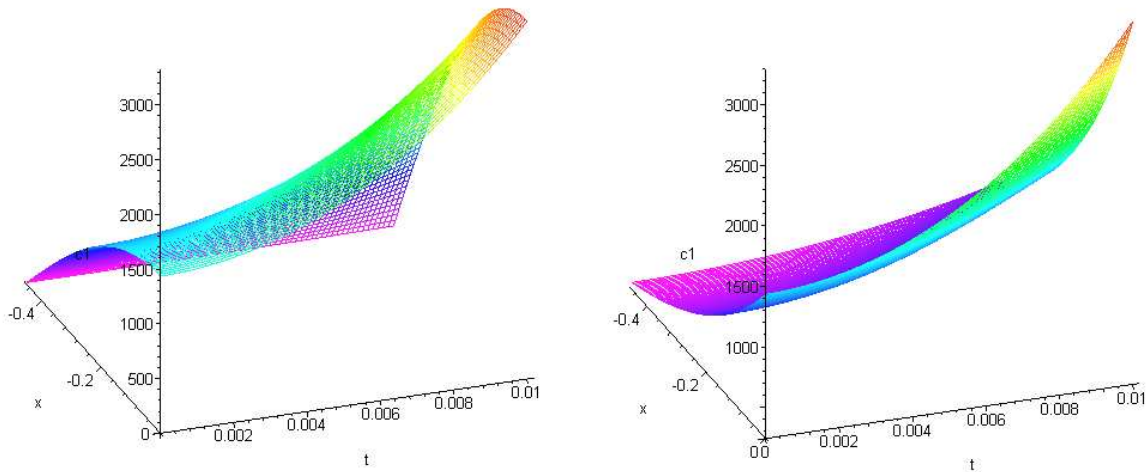


Abb. 5-11: Räumliche und zeitliche Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten Gruppe c_1 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$) für die Näherungslösung der P_1 Transportgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

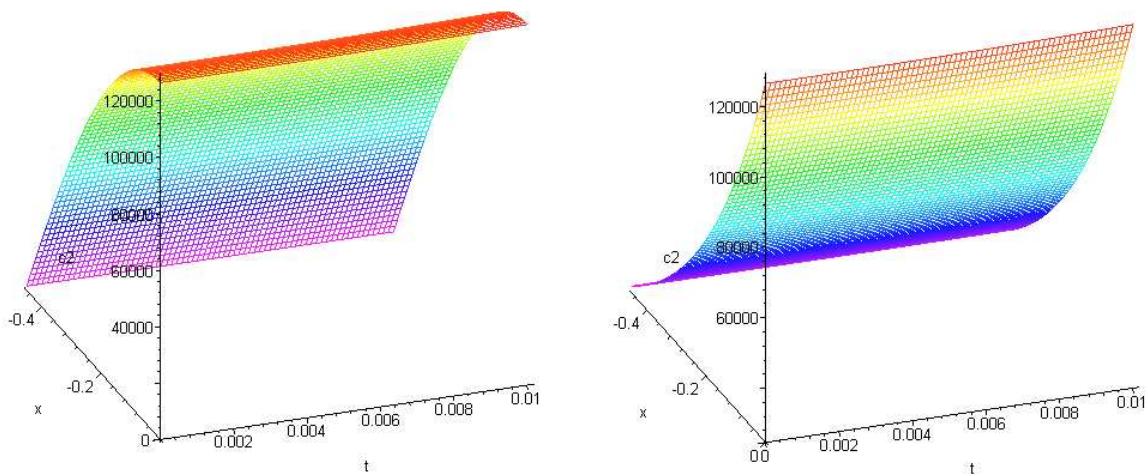


Abb. 5-12: Räumliche und zeitliche Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der zweiten Gruppe c_2 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$) für die Näherungslösung der P_1 Transportgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

Die folgenden vier Abbildungen zeigen die Differenzen im Neutronenfluss (Abb. 5-13), im Neutronenstrom (Abb. 5-14) und in den Konzentrationen der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten (Abb. 5-15) und der zweiten (Abb. 5-16) Gruppe für eine starke positive Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$). Die Struktur der Differenz im Neutronenfluss zwischen der Lösung der Diffusions- und der P_1 Transportgleichung für eine starke Störung (Abb. 5-13) unterscheidet sich deutlich von der bisher untersuchten schwächeren Störung (Abb. 5-5). In Falle einer Störung nahe prompt kritisch, verlieren die verzögerten Neutronen die für kleine Störungen typische, das Reaktorverhalten dominierende Rolle. Die Neutronenpopulation vermehrt sich dann auch nicht mehr mit Zeitkonstanten die charakteristisch für die Entstehung der verzögerten Neutronen ist, sondern mit Zeitkonstanten im Bereich der Lebensdauer der prompten Neutronen. Auf die durch die Multiple Scale Expansion entwickelten Faktoren der Lösung hat diese Änderung folgende Auswirkung. Die für die Diffusions- und die P_1 Transportlösung identischen Exponenten für die Darstellung des Systemverhaltens aufgrund der Produktion verzögerter Neutronen verlieren an Einfluss auf die Gesamtlösung, während die in den beiden

Näherungslösungen unterschiedlichen Komponenten, die für das Systemverhalten aufgrund der Produktion der prompten Neutronen stehen, größeren Einfluss auf die Lösung gewinnen. Der in den Ergebnissen für schwächere Störungen abklingende Peak ist in den Ergebnissen für starke Störungen nicht mehr, oder nur noch sehr schwach vorhanden. Der Peak wird durch eine exponentiell wachsende Differenz überlagert.

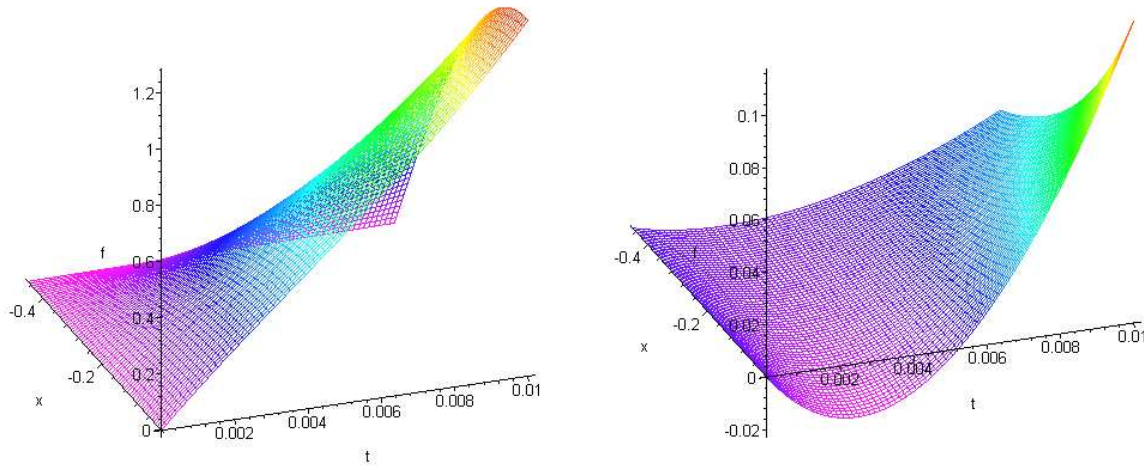


Abb. 5-13: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung des Neutronenflusses ϕ als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$) zwischen den Näherungslösungen der P_1 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($f_{\text{trans}} - f_{\text{diff}}$)

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

Das für die Differenz des Neutronenflusses diskutierte Verhalten kann ebenfalls für die Differenz im Neutronenstrom (Abb. 5-14) beobachtet werden, auch hier wird der Einfluss der prompten Neutronenproduktion deutlich. Die anfängliche Differenz, wie sie in der schwachen Störung zu beobachten war (Abb. 5-6), ist deutlich ausgeprägter und klingt auch über den gesamten, beobachtete Zeitraum nur langsam ab.

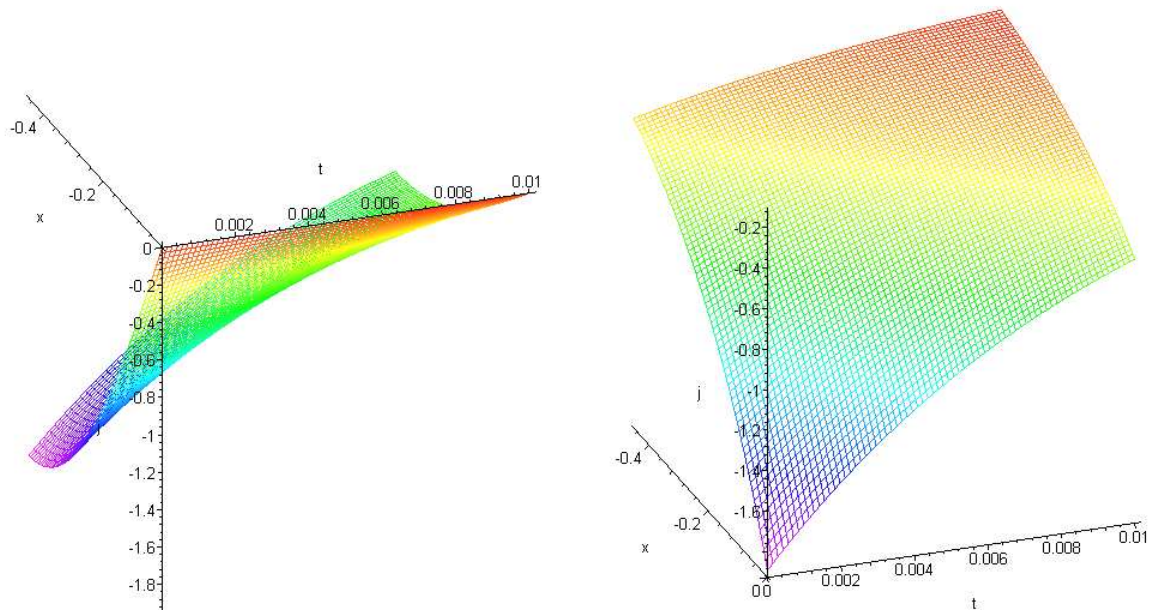


Abb. 5-14: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung des Neutronenstromes j als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$) zwischen den Näherungslösungen der P_1 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($j_{\text{trans}} - j_{\text{diff}}$)

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

Die Differenzen zwischen den durch die Diffusionsgleichung und die P_1 Transportgleichung berechneten Konzentrationen der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten (Abb. 5-15) und der zweiten (Abb. 5-16) Gruppe sind in den beiden folgenden Abbildungen dargestellt.

Wie bereits in der Diskussion der Differenzen im Neutronenfluss festgestellt, sind nur die zeitlichen Exponentialfunktionen die für die Beschreibung der verzögerten Neutronenpopulation für die Diffusions- und die P_1 Transportgleichung durch eine identische Reihenentwicklung bestimmt, die Exponenten für die Entwicklung der prompten Neutronenpopulation aber nicht, wie bereits besprochen. Der deutlich unterschiedliche zeitliche Verlauf der Konzentrationen der Vorläuferkerne kann durch einen Blick auf die Differenzen im Neutronenfluss erklärt werden (siehe Abb. 5-13). Die Differenzen im Fall $a_k < 0$ sind im kurzen Zeitbereich wesentlich geringer als im Fall $a_k > 0$. Im Fall $a_k < 0$ hebt sich der Einfluss der verschiedenen Faktoren der Lösung auf, während er sich im Fall $a_k > 0$ addiert. Dieser Unterschied würde sich aber sobald die betrachteten Zeiträume länger werden nahezu aufheben.

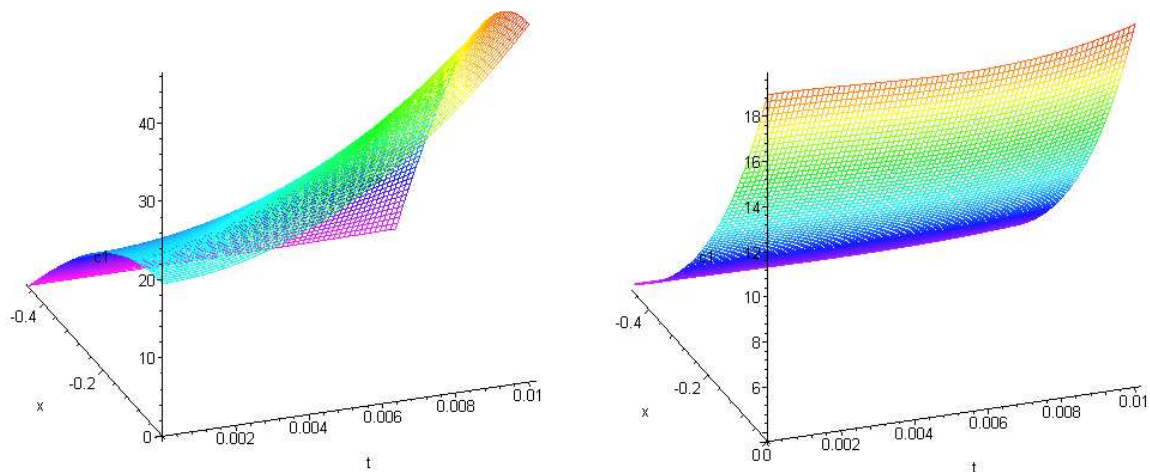


Abb. 5-15: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten Gruppe c_1 als Folge einer positiven Reaktivitätsstö-

ung ($\rho = 1 \$$) zwischen den Näherungslösungen der P_1 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($c_{1trans} - c_{1diff}$)

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

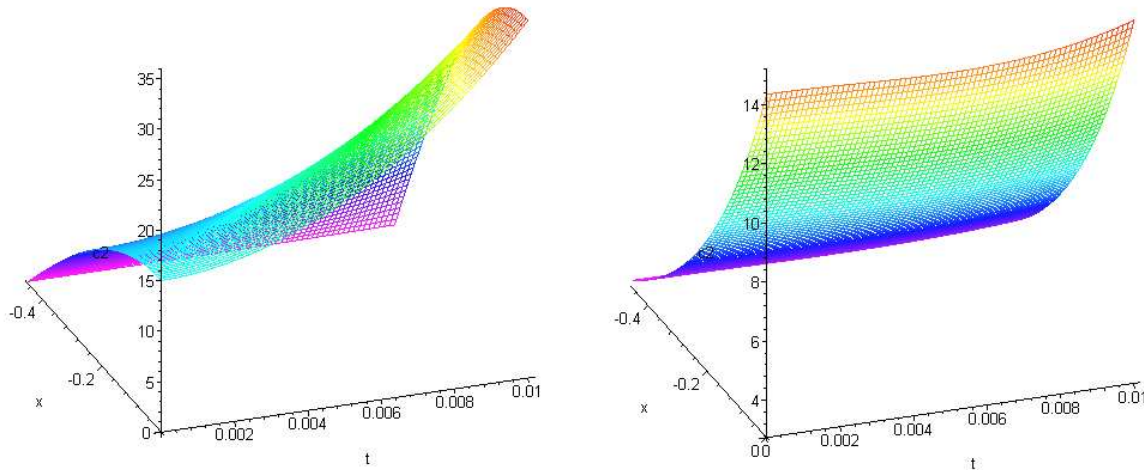


Abb. 5-16: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der zweiten Gruppe c_2 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$) zwischen den Näherungslösungen der P_1 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($c_{2trans} - c_{2diff}$)

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

5.3 Zusammenfassung

Die P_1 Neutronentransportgleichung mit zwei Gruppen verzögerter Neutronen kann durch Multiple Scale Expansion in analytische Näherungsfunktionen entwickelt werden. Durch dieses Verfahren ist eine sehr gute Näherungslösung zu erzielen. Bei der Entwicklung der P_1 Gleichung tritt im Vergleich zu der Diffusionsgleichung ein zusätzlicher, kurzlebiger Term auf, der die Zeitableitung des Neutronenstromes abbildet, während das Zeitverhalten der P_1 und der Diffusionsgleichung im Zeitbereich der Produktion der verzögerten Neutronen in der Entwicklung der Näherungslösung identisch ist. Der Vergleich des Raumzeitverhaltens der P_1 und der Diffusionsgleichung für eine homogene Zelle zeigt deshalb für kleine Störungen ein sehr ähnliches Langzeitverhalten, im Kurzzeitverhalten sind durch den zusätzlichen Term Unterschiede sichtbar. Diese Unterschiede sind aufgrund der unterschiedlichen Lösungsstruktur qualitativ immer vorhanden, quantitativ aber sehr stark von den Systemparametern abhängig. Für prompt kritische Störungen beispielsweise sind anhaltende Unterschiede sichtbar, denn in diesem Fall beeinflussen die unterschiedlichen die Terme im Zeitbereich der prompten Neutronenproduktion das Ergebnis besonders stark. Insbesondere die angesprochene unterschiedliche Lösungsstruktur des Neutronenstroms wird bereits in den Herleitungen der analytischen Näherungsfunktionen deutlich sichtbar.

6 MULTIPLE SCALE EXPANSION DER P₃ NEUTRONENTRANSPORTGLEICHUNG

6.1 Entwicklung der analytischen Näherungsfunktionen

6.1.1 Lösung der P₃ Transportgleichung mit zwei Gruppen verzögerter Neutronen

Nachdem die Entwicklung der Näherungslösung für die P₁ Gleichungen im vorhergehenden Kapitel mit exzellenten Ergebnissen durchgeführt wurde, folgt als nächster und letzter Schritt zu einer umfassenden Lösung der Neutronentransportgleichung die Entwicklung der Näherungslösung für die P₃ Gleichungen. Ebenso wie für die P₁ Gleichungen mit mehreren Gruppen verzögerter Neutronen, kann auch für die komplexeren P₃ Gleichungen mit verzögerten Neutronen keine analytische Lösung mehr gewonnen werden. Im, der Lösungsentwicklung, folgenden Abschnitt 6.2 wird ein Vergleich der Expansionslösung mit der zuvor entwickelten Expansionslösung für die Diffusionsgleichung durchgeführt.

Die Multiple Scale Expansion beginnt bei den aus der Literatur bekannten statischen P₃ Gleichungen ^{[142], [143]}, hier allerdings durch den instationären Term, die Quelle der verzögerten Neutronen und die Gleichungen für die Produktion der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen erweitert.

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial j(x,t)}{\partial x} + \Sigma_t \phi(x,t) - \Sigma_{s,0} \phi(x,t) = (1 - \beta) \nu \Sigma_f \phi(x,t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i C_i(x,t) \quad (6.1)$$

$$\frac{1}{v} \frac{\partial j(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{3} \frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial k(x,t)}{\partial x} + \Sigma_t j(x,t) - \Sigma_{s,1} j(x,t) = 0 \quad (6.2)$$

$$\frac{1}{v} \frac{\partial k(x,t)}{\partial t} + \frac{2}{5} \frac{\partial j(x,t)}{\partial x} + \frac{3}{5} \frac{\partial l(x,t)}{\partial x} + \Sigma_t k(x,t) - \Sigma_{s,2} k(x,t) = 0 \quad (6.3)$$

$$\frac{1}{v} \frac{\partial l(x,t)}{\partial t} + \frac{3}{7} \frac{\partial k(x,t)}{\partial x} + \Sigma_t l(x,t) - \Sigma_{s,3} l(x,t) = 0 \quad (6.4)$$

$$\frac{\partial C_i(x,t)}{\partial t} = \beta \nu \Sigma_f \phi(x,t) - \lambda_i C_i(x,t), \quad i = 1, \dots, n \quad (6.5)$$

Die bisher jeweils im ersten Schritt vorgenommene Bestimmung der exakten Lösung des Systems mit einer Gruppe verzögerter Neutronen ist für die P₃ Gleichungen nicht mehr möglich. Die vier P₃ Gleichungen führen im Verlauf des Lösungsverfahrens bereits zu einer Gleichung 4. Ordnung, die die Grenze der analytischen Lösbarkeit darstellt. Mit der zusätzlichen Gleichung für die Produktion verzögerter Neutronen entstünde somit eine nicht mehr analytisch lösbare Gleichung 5. Ordnung.

Aufgrund dieser Tatsache beginnt die Entwicklung für die zeitabhängigen P₃ Gleichungen direkt mit der Multiple Scale Expansion der folgenden, dimensionslosen Gleichungen.

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial j}{\partial \xi} - (a_k + a)f = \varepsilon_1 c_1 + \varepsilon_2 c_2 \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial j}{\partial \tau} + \frac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial \xi} + \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial \xi} + s_1 j = 0 \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} + \frac{2}{5} \frac{\partial j}{\partial \xi} + \frac{3}{5} \frac{\partial l}{\partial \xi} + s_2 k = 0 \quad (6.8)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \tau} + \frac{3}{7} \frac{\partial k}{\partial \xi} + s_3 l = 0 \quad (6.9)$$

$$\frac{\partial c_m}{\partial \tau} = b_m f - \varepsilon_m c_m \quad m = 1..2 \quad (6.10)$$

Es werden die bereits in Abschnitt 4.1.1 eingeführten Abkürzungen verwendet. Zusätzlich werden noch Variablen für die Effektivität des Neutronentransports höherer Ordnung eingeführt.

$$s_l = \frac{\Sigma_t - \Sigma_{s,l}}{\nu \Sigma_f} \quad l = 2..3 \quad (6.11)$$

Die 3 Zeitskalen für die Multiple Scale Expansion definieren sich aus der dimensionslosen Zeit τ und aus der Multiplikation der dimensionslosen Zeit τ mit den beiden kleinen Parametern ε_1 und ε_2 (siehe Gl. (3.17))

$$\tau_0 = \tau, \quad \tau_1 = \varepsilon_1 \tau, \quad \tau_2 = \varepsilon_2 \tau \quad (6.12)$$

Die zu expandierenden Variablen Neutronenfluss ϕ , Neutronenstrom j , die höheren Neutronenflussmomente k und l und die Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_m werden durch die Expansion in Funktionen in den drei Zeitskalen entwickelt.

$$\phi = \phi(\xi, \tau_0, \tau_1, \tau_2) \quad (6.13)$$

$$j = j(\xi, \tau_0, \tau_1, \tau_2) \quad (6.14)$$

$$k = k(\xi, \tau_0, \tau_1, \tau_2) \quad (6.15)$$

$$l = l(\xi, \tau_0, \tau_1, \tau_2) \quad (6.16)$$

$$c_m = c_m(\xi, \tau_0, \tau_1, \tau_2) \quad m = 1..2 \quad (6.17)$$

Der Operator der Zeitableitung $\frac{d}{d\tau}$ wird aus der Entwicklung für die punktkinetischen Gleichungen übernommen (Gl (3.20)).

Wird die Multiple Scale Expansion des Zeitparameters τ , Gleichung (6.12), nun auf die Variablen Neutronenfluss ϕ , Neutronenstrom j , die höheren Neutronenflussmomente k und l und die Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_m angewendet, so entstehen die folgenden unendlichen Reihen.

$$\phi = f_0 + \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2 + \varepsilon_1^2 f_3 + \varepsilon_2^2 f_4 + \dots \quad (6.18)$$

$$j = j_0 + \varepsilon_1 j_1 + \varepsilon_2 j_2 + \varepsilon_1^2 j_3 + \varepsilon_2^2 j_4 + \dots \quad (6.19)$$

$$k = k_0 + \varepsilon_1 k_1 + \varepsilon_2 k_2 + \varepsilon_1^2 k_3 + \varepsilon_2^2 k_4 + \dots \quad (6.20)$$

$$l = l_0 + \varepsilon_1 l_1 + \varepsilon_2 l_2 + \varepsilon_1^2 l_3 + \varepsilon_2^2 l_4 + \dots \quad (6.21)$$

$$c_m = c_{m0} + \varepsilon_1 c_{m1} + \varepsilon_2 c_{m2} + \varepsilon_1^2 c_{m3} + \varepsilon_2^2 c_{m4} + \dots \quad m = 1..2 \quad (6.22)$$

In den folgenden Schritten gilt es nun, die in den Gleichungen (6.18) bis (6.22) eingeführten Koeffizienten f_x , j_x , k_x , l_x , c_{mx} zu bestimmen.

Im ersten Schritt sind die Gleichungen der Multiple Scale Expansion der 0. Ordnung in ε zu lösen.

Die gesamte Gleichung für die Multiple Scale Expansion erhält man durch Einsetzen der Gleichungen (3.20) und (6.18) bis (6.22) in die dimensionslosen Ursprungsgleichungen (6.6) bis (6.10). Zusammengefasst ergeben die Terme 0. Ordnung in ε folgende der Gleichungen für die Neutronenfluss f_0 , den Neutronenstrom j_0 , die höheren Neutronenflussmomente k_0 und l_0 und die Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_{m0} :

$$\frac{\partial f_0}{\partial \tau_0} + \frac{\partial j_0}{\partial \xi} - (a_k + a)f_0 = 0 \quad (6.23)$$

$$\frac{\partial j_0}{\partial \tau_0} + \frac{1}{3} \frac{\partial f_0}{\partial \xi} + \frac{2}{3} \frac{\partial k_0}{\partial \xi} + s_1 j_0 = 0 \quad (6.24)$$

$$\frac{\partial k_0}{\partial \tau_0} + \frac{2}{5} \frac{\partial j_0}{\partial \xi} + \frac{3}{5} \frac{\partial l_0}{\partial \xi} + s_2 k_0 = 0 \quad (6.25)$$

$$\frac{\partial l_0}{\partial \tau_0} + \frac{3}{7} \frac{\partial k_0}{\partial \xi} + s_3 l_0 = 0 \quad (6.26)$$

$$\frac{\partial c_{m0}}{\partial \tau_0} = b_m f_0 \quad m = 1..2 \quad (6.27)$$

Die Lösungen dieses Systems von Differentialgleichungen erster Ordnung geben Information über die Anpassung des prompten Neutronenflusses f_0 , des prompten Neutronenstromes j_0 , der höheren Neutronenflussmomente k_0 und l_0 und die Veränderung der Konzentration der Vorläuferkerne verzögerter Neutronen c_{m0} , die durch eine Störung verursacht werden.

Die Lösungen definieren sich folgendermaßen:

- für $a_k < 0$ ergibt sich wieder eine Kombination aus Exponentialfunktionen in Raum und Zeit mit zugeordneten Konstanten

$$f_0 = (K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi}) A_{0n} e^{e_{ean} \tau_0} + (K_{x3} e^{e_c \xi} + K_{x4} e^{-e_c \xi}) B_{0n} e^{e_{ecn} \tau_0} \quad n = 1..4 \quad (6.28)$$

$$j_0 = (K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi}) j_{ean} A_{0n} e^{e_{ean} \tau_0} + (K_{x3} e^{e_c \xi} - K_{x4} e^{-e_c \xi}) j_{ecn} B_{0n} e^{e_{ecn} \tau_0} + C_{0n} e^{-s_1 \tau_0} \quad n = 1..4 \quad (6.29)$$

$$k_0 = (K_{x1}e^{e_a\xi} + K_{x2}e^{-e_a\xi})k_{ean}A_{0n}e^{e_{ean}\tau_0} + (K_{x3}e^{e_c\xi} + K_{x4}e^{-e_c\xi})k_{ecn}B_{0n}e^{e_{ecn}\tau_0} + D_{0n}e^{-s_1\tau_0} \quad n = 1..4 \quad (6.30)$$

$$l_0 = (K_{x1}e^{e_a\xi} - K_{x2}e^{-e_a\xi})l_{ean}A_{0n}e^{e_{ean}\tau_0} + (K_{x3}e^{e_c\xi} - K_{x4}e^{-e_c\xi})l_{ecn}B_{0n}e^{e_{ecn}\tau_0} + E_{0n}e^{-s_1\tau_0} \quad n = 1..4 \quad (6.31)$$

$$c_{10} = (K_{x1}e^{e_a\xi} + K_{x2}e^{-e_a\xi})\frac{b_1}{e_{ean}}A_{0n}e^{e_{ean}\tau_0} + (K_{x3}e^{e_c\xi} + K_{x4}e^{-e_c\xi})\frac{b_1}{e_{ecn}}B_{0n}e^{e_{ecn}\tau_0} + B_{10}(\xi) \quad n = 1..4 \quad (6.32)$$

$$c_{20} = (K_{x1}e^{e_a\xi} + K_{x2}e^{-e_a\xi})\frac{b_2}{e_{ean}}A_{0n}e^{e_{ean}\tau_0} + (K_{x3}e^{e_c\xi} + K_{x4}e^{-e_c\xi})\frac{b_2}{e_{ecn}}B_{0n}e^{e_{ecn}\tau_0} + B_{20}(\xi) \quad n = 1..4 \quad (6.33)$$

mit

$$e_a = \frac{1}{6}\sqrt{70s_3s_2 - 56a_ks_3 - 54a_ks_1 - 2sq} \quad (6.34)$$

$$sq = \sqrt{784a_k^2s_3^2 - 1960a_ks_3^2s_2 + 1512a_k^2s_3s_1 + 1225s_3^2s_2^2 + 1890a_ks_3s_2s_1 + 729a_k^2s_1^2} \quad (6.35)$$

$$j_{ean} = Z_{an} \quad n = 1..4 \quad (6.36)$$

$$k_{ean} = \frac{3Z_{an}^2e_a - 3Z_{an}a_k - 3Z_{an}a - e_a - 3Z_{an}s_1}{2e_a} \quad n = 1..4 \quad (6.37)$$

$$l_{ean} = \frac{1}{6e_a^2} \left(\begin{aligned} &15Z_{an}^3e_a^2 - 30Z_{an}^2e_ka_k - 30Z_{an}^2e_ka - 9Z_{an}e_a^2 - 15Z_{an}^2e_ks_1 \\ &+ 15Z_{an}a_k^2 + 30Z_{an}a_ka + 5e_ka_k + 15Z_{an}a_ks_1 + 15Z_{an}a^2 + 5e_ka \\ &+ 15Z_{an}as_1 - 15Z_{an}^2e_as_2 + 15Z_{an}a_ks_2 + 15Z_{an}as_2 + 5s_2e_a + 15Z_{an}s_1s_2 \end{aligned} \right) \quad n = 1..4 \quad (6.38)$$

$$e_{ean} = -Z_{an}e_a + a_k + a \quad n = 1..4 \quad (6.39)$$

Die vier eingeführten Variablen Z_{an} sind durch die folgende Gleichung 4. Ordnung bestimmt:

$$\begin{aligned}
 & 105e_a^3 Z^4 + \left(-105e_a^2 s_2 - 315a_k e_a^2 - 105e_a^2 s_3 - 315a e_a^2 - 105e_a^2 s_1 \right) Z^3 + \\
 & \left(210s_3 a_k e_a + 315a^2 e_a - 90e_a^3 + 210s_2 a e_a + 105e_a s_2 s_1 + 315a_k^2 e_a + 210s_2 a_k e_a \right. \\
 & \left. + 105e_a s_2 s_3 + 210s_3 a e_a + 105e_a s_3 s_1 + 210s_1 a e_a + 630a_k a e_a + 210s_1 a_k e_a \right) Z^2 \\
 & + \left(\begin{aligned} & -210a_k a s_1 - 105a_k s_2 s_1 - 105a s_2 s_1 - 105a_k s_3 s_1 - 210a_k s_2 a - 210a_k a s_3 \\ & - 105a_k s_3 s_2 - 105a s_3 s_2 - 105a^2 s_1 - 105a s_3 s_1 - 105s_3 s_2 s_1 - 105a_k^3 - 105a^3 \\ & + 35e_a^2 s_2 + 125a_k e_a^2 + 63e_a^2 s_3 + 125a e_a^2 + 27e_a^2 s_1 - 315a_k^2 a - 105s_2 a_k^2 \\ & - 105s_2 a^2 - 315a_k a^2 - 105s_3 a_k^2 - 105s_3 a^2 - 105s_1 a_k^2 \end{aligned} \right) Z \\
 & - 70a_k a e_a - 35s_2 a_k e_a - 35s_2 a e_a - 35s_3 a_k e_a - 35a_k^2 e_a - 35s_3 a e_a - 35e_a s_2 s_3 + 9e_a^3 \\
 & - 35a^2 e_a = 0
 \end{aligned} \tag{6.40}$$

und

$$e_c = \frac{1}{6} \sqrt{70s_3 s_2 - 56a_k s_3 - 54a_k s_1 + 2sq} \tag{6.41}$$

$$j_{ecn} = Z_{cn} \quad n = 1..4 \tag{6.42}$$

$$k_{ecn} = \frac{3Z_{cn}^2 e_c - 3Z_{cn} a_k - 3Z_{cn} a - e_c - 3Z_{cn} s_1}{2e_c} \quad n = 1..4 \tag{6.43}$$

$$\begin{aligned}
 l_{ecn} = & \frac{1}{6e_c^2} \left(\begin{aligned} & 15Z_{cn}^3 e_a^2 - 30Z_{cn}^2 e_c a_k - 30Z_{cn}^2 e_c a - 9Z_{cn} e_c^2 - 15Z_{cn}^2 e_c s_1 \\ & + 15Z_{cn} a_k^2 + 30Z_{cn} a_k a + 5e_c a_k + 15Z_{cn} a_k s_1 + 15Z_{cn} a^2 + 5e_c a \\ & + 15Z_{cn} a s_1 - 15Z_{cn}^2 e_c s_2 + 15Z_{cn} a_k s_2 + 15Z_{cn} a s_2 + 5s_2 e_c + 15Z_{cn} s_1 s_2 \end{aligned} \right) \\
 & n = 1..4
 \end{aligned} \tag{6.44}$$

$$e_{ecn} = -Z_{cn} e_c + a_k + a \quad n = 1..4 \tag{6.45}$$

Die vier eingeführten Variablen Z_{cn} sind durch die folgende Gleichung 4. Ordnung bestimmt:

$$\begin{aligned}
 & 105e_c^3 Z^4 + \left(-105e_c^2 s_2 - 315a_k e_c^2 - 105e_c^2 s_3 - 315a e_c^2 - 105e_c^2 s_1 \right) Z^3 + \\
 & \left(210s_3 a_k e_c + 315a^2 e_c - 90e_c^3 + 210s_2 a e_c + 105e_c s_2 s_1 + 315a_k^2 e_c + 210s_2 a_k e_c \right. \\
 & \left. + 105e_c s_2 s_3 + 210s_3 a e_c + 105e_c s_3 s_1 + 210s_1 a e_c + 630a_k a e_c + 210s_1 a_k e_c \right) Z^2 \\
 & + \left(\begin{aligned} & -210a_k a s_1 - 105a_k s_2 s_1 - 105a s_2 s_1 - 105a_k s_3 s_1 - 210a_k s_2 a - 210a_k a s_3 \\ & - 105a_k s_3 s_2 - 105a s_3 s_2 - 105a^2 s_1 - 105a s_3 s_1 - 105s_3 s_2 s_1 - 105a_k^3 - 105a^3 \\ & + 35e_c^2 s_2 + 125a_k e_c^2 + 63e_c^2 s_3 + 125a e_c^2 + 27e_c^2 s_1 - 315a_k^2 a - 105s_2 a_k^2 \\ & - 105s_2 a^2 - 315a_k a^2 - 105s_3 a_k^2 - 105s_3 a^2 - 105s_1 a_k^2 \end{aligned} \right) Z \\
 & - 70a_k a e_c - 35s_2 a_k e_c - 35s_2 a e_c - 35s_3 a_k e_c - 35a_k^2 e_c - 35s_3 a e_c - 35e_c s_2 s_3 + 9e_c^3 \\
 & - 35a^2 e_c = 0
 \end{aligned} \tag{6.46}$$

- für $a_k > 0$ ergibt sich eine Kombination aus trigonometrischen Funktionen und Exponentialfunktionen im Raum und Exponentialfunktionen in der Zeit mit jeweils zugeordneten Konstanten

$$f_0 = [K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi)] A_{0n} e^{e_{tan} \tau_0} + (K_{x3} e^{e_c \xi} + K_{x4} e^{-e_c \xi}) B_{0n} e^{e_{ecn} \tau_0} \quad n = 1..4 \quad (6.47)$$

$$j_0 = [K_{x1} \sin(x_t \xi) - K_{x2} \cos(x_t \xi)] j_{tan} A_{0n} e^{e_{tan} \tau_0} + (K_{x3} e^{e_c \xi} - K_{x4} e^{-e_c \xi}) j_{tcn} B_{0n} e^{e_{ecn} \tau_0} + C_{0n} e^{-s_1 \tau_0} \quad n = 1..4 \quad (6.48)$$

$$k_0 = [K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi)] k_{tan} A_{0n} e^{e_{tan} \tau_0} + (K_{x3} e^{e_c \xi} - K_{x4} e^{-e_c \xi}) k_{tcn} B_{0n} e^{e_{ecn} \tau_0} + D_{0n} e^{-s_2 \tau_0} \quad n = 1..4 \quad (6.49)$$

$$l_0 = [K_{x1} \sin(x_t \xi) - K_{x2} \cos(x_t \xi)] l_{tan} A_{0n} e^{e_{tan} \tau_0} + (K_{x3} e^{e_c \xi} - K_{x4} e^{-e_c \xi}) l_{tcn} B_{0n} e^{e_{ecn} \tau_0} + E_{0n} e^{-s_3 \tau_0} \quad n = 1..4 \quad (6.50)$$

$$c_{10} = [K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi)] \frac{b_1}{e_{tan}} A_{0n} e^{e_{tan} \tau_0} + (K_{x3} e^{e_c \xi} + K_{x4} e^{-e_c \xi}) \frac{b_1}{e_{tcn}} B_{0n} e^{e_{ecn} \tau_0} + B_{10}(\xi) \quad n = 1..4 \quad (6.51)$$

$$c_{20} = [K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi)] \frac{b_2}{e_{tan}} A_{0n} e^{e_{tan} \tau_0} + (K_{x3} e^{e_c \xi} + K_{x4} e^{-e_c \xi}) \frac{b_2}{e_{tcn}} B_{0n} e^{e_{ecn} \tau_0} + B_{20}(\xi) \quad n = 1..4 \quad (6.52)$$

mit

$$x_t = \frac{1}{6} \sqrt{-70s_3 s_2 + 56a_k s_3 + 54a_k s_1 + 2sq} \quad (6.53)$$

$$sq = \sqrt{784a_k^2 s_3^2 - 1960a_k s_3^2 s_2 + 1512a_k^2 s_3 s_1 + 1225s_3^2 s_2^2 + 1890a_k s_3 s_2 s_1 + 729a_k^2 s_1^2} \quad (6.54)$$

$$j_{tan} = Z_{an} \quad n = 1..4 \quad (6.55)$$

$$k_{tan} = -\frac{3Z_{an}^2 x_t - 3Z_{an} a_k - 3Z_{an} a + x_t - 3Z_{an} s_1}{2x_t} \quad n = 1..4 \quad (6.56)$$

$$l_{tan} = -\frac{1}{6x_t^2} \left(\begin{aligned} &15Z_{an}^3 x_t^2 - 30Z_{an}^2 x_t a_k - 30Z_{an}^2 x_t a + 9Z_{an} x_t^2 - 15Z_{an}^2 x_t s_1 \\ &+ 15Z_{an} a_k^2 + 30Z_{an} a_k a - 5x_t a_k + 15Z_{an} a_k s_1 + 15Z_{an} a^2 - 5x_t a \\ &+ 15Z_{an} a s_1 - 15Z_{an}^2 x_t s_2 + 15Z_{an} a_k s_2 + 15Z_{an} a s_2 - 5s_2 x_t + 15Z_{an} s_1 s_2 \end{aligned} \right) \quad (6.57)$$

$n = 1..4$

$$e_{tan} = -Z_{an} x_t + a_k + a \quad n = 1..4 \quad (6.58)$$

Die vier eingeführten Variablen Z_{an} sind durch die folgende Gleichung 4. Ordnung bestimmt:

$$\begin{aligned} &105x_t^3 Z^4 + \left(-105x_t^2 s_2 - 315a_k x_t^2 - 105x_t^2 s_3 - 315a x_t^2 - 105x_t^2 s_1 \right) Z^3 + \\ &\left(210s_3 a_k x_t + 315a^2 x_t + 90x_t^3 + 210s_2 a x_t + 105x_t s_2 s_1 + 315a_k^2 x_t + 210s_2 a_k x_t \right. \\ &\left. + 105x_t s_2 s_3 + 210s_3 a x_t + 105x_t s_3 s_1 + 210s_1 a x_t + 630a_k a x_t + 210s_1 a_k x_t \right) Z^2 \\ &+ \left(\begin{aligned} &-210a_k a s_1 - 105a_k s_2 s_1 - 105a s_2 s_1 - 105a_k s_3 s_1 - 210a_k s_2 a - 210a_k a s_3 \\ &-105a_k s_3 s_2 - 105a s_3 s_2 - 105a^2 s_1 - 105a s_3 s_1 - 105s_3 s_2 s_1 - 105a_k^3 - 105a^3 \\ &-35x_t^2 s_2 - 125a_k x_t^2 - 63x_t^2 s_3 - 125a x_t^2 - 27x_t^2 s_1 - 315a_k^2 a - 105s_2 a_k^2 \\ &-105s_2 a^2 - 315a_k a^2 - 105s_3 a_k^2 - 105s_3 a^2 - 105s_1 a_k^2 \end{aligned} \right) Z \\ &+ 70a_k a x_t + 35s_2 a_k x_t + 35s_2 a x_t + 35s_3 a_k x_t + 35a_k^2 x_t + 35s_3 a x_t + 35x_t s_2 s_3 + 9x_t^3 \\ &+ 35a^2 x_t = 0 \end{aligned} \quad (6.59)$$

und mit den Variablen mit Index c die bereits in den Gleichungen (6.41), (6.42), (6.43) und (6.44) definiert sind.

Es gilt zu beachten, dass die zu bestimmenden Konstanten A_{0n} , B_{0n} , C_{0n} , D_{0n} , E_{0n} , B_{10} und B_{20} in τ_0 mit Hilfe der Gleichungen höherer Ordnung in ε und der Anfangswerte ermittelt werden müssen. Diese Konstanten sind bisher nur als konstant in bezug auf τ_0 festgelegt, können aber durchaus Funktionen in bezug auf τ_1 und τ_2 sein.

Im zweiten Schritt sind die Gleichungen der Multiple Scale Expansion der 1. Ordnung in ε zu lösen. Aus der gesamten Gleichung der Multiple Scale Expansion zusammengefasst ergeben die Terme 1. Ordnung in ε folgende Gleichungen für die Neutronenflüsse f_1 und f_2 , die Neutronenströme j_1 und j_2 , die höheren Neutronenflussmomente k_1 , k_2 und l_1 , l_2 und die Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_{m1} und c_{m2} .

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 \frac{\partial f_1}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial f_2}{\partial \tau_0} + \varepsilon_1 \frac{\partial f_0}{\partial \tau_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial f_0}{\partial \tau_2} + \varepsilon_1 \frac{\partial j_1}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \frac{\partial j_2}{\partial \xi} \\ &- \varepsilon_1 (a_k + a) f_1 - \varepsilon_2 (a_k + a) f_2 = \varepsilon_1 c_{10} + \varepsilon_2 c_{20} \end{aligned} \quad (6.60)$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 \frac{\partial j_1}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial j_2}{\partial \tau_0} + \varepsilon_1 \frac{\partial j_0}{\partial \tau_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial j_0}{\partial \tau_2} + \\ &\varepsilon_1 \frac{1}{3} \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \frac{1}{3} \frac{\partial f_2}{\partial \xi} + \varepsilon_1 \frac{2}{3} \frac{\partial k_1}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \frac{2}{3} \frac{\partial k_2}{\partial \xi} + \varepsilon_1 s_1 j_1 + \varepsilon_2 s_1 j_2 = 0 \end{aligned} \quad (6.61)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \frac{\partial k_1}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial k_2}{\partial \tau_0} + \varepsilon_1 \frac{\partial k_0}{\partial \tau_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial k_0}{\partial \tau_2} + \\ \varepsilon_1 \frac{2}{5} \frac{\partial j_1}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \frac{2}{5} \frac{\partial j_2}{\partial \xi} + \varepsilon_1 \frac{3}{5} \frac{\partial l_1}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \frac{3}{5} \frac{\partial l_2}{\partial \xi} + \varepsilon_1 s_2 k_1 + \varepsilon_2 s_2 k_2 = 0 \end{aligned} \quad (6.62)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial l_1}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial l_2}{\partial \tau_0} + \varepsilon_1 \frac{\partial l_0}{\partial \tau_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial l_0}{\partial \tau_2} + \varepsilon_1 \frac{3}{7} \frac{\partial k_1}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \frac{3}{7} \frac{\partial k_2}{\partial \xi} + \varepsilon_1 s_3 l_1 + \varepsilon_2 s_3 l_2 = 0 \quad (6.63)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial c_{m1}}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial c_{m2}}{\partial \tau_0} + \varepsilon_1 \frac{\partial c_{m0}}{\partial \tau_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial c_{m0}}{\partial \tau_2} = \varepsilon_1 b_m f_1 + \varepsilon_2 b_m f_2 - \varepsilon_m c_{m0} \quad m = 1..2 \quad (6.64)$$

Die Gleichungen (6.60) bis (6.63) enthalten gegenüber den Gleichungen (6.23) bis (6.26) zusätzlich die Information über die Anpassung des Neutronenflusses f_1 und f_2 , des Neutronenstromes j_1 und j_2 und der höheren Neutronenflussmomente k_1 , k_2 und l_1 , l_2 aufgrund der Produktion verzögerter Neutronen im Zeithorizont τ_1 und τ_2 . Die Gleichungen (6.64) enthalten ebenfalls gegenüber den Gleichungen 0. Ordnung (6.27) die zusätzliche Information über die Veränderung der Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_{m1} und c_{m2} . Die Konzentrationsveränderungen entstehen aufgrund der Produktion von Vorläuferkernen durch verzögerte Neutronen und des Zerfalls von, bereits im Zeithorizont τ_0 produzierten, Vorläuferkernen im Zeithorizont τ_1 und τ_2 .

Die folgenden Herleitungsschritte bis zur Bestimmung der Lösungen für f_1 , f_2 usw. werden der Übersichtlichkeit halber nur für $a_k < 0$ durchgeführt, verlaufen aber für $a_k > 0$ analog.

Durch Einsetzen der im vorherigen Schritt bestimmten Lösungen (6.32) und (6.33) und der abgeleiteten Lösung (6.28) erhält man analog zu Abschnitt 5.1.2 Gleichungen für die Neutronenpopulationen n_1 und n_2 und die Neutronenströme j_1 und j_2 und zusätzlich für die höheren Neutronenflussmomente k_1 , k_2 und l_1 , l_2 . Aus diesen Gleichungen ergeben sich Bedingungen zur Bestimmung der Unbekannten A_{0n} , B_{0n} , C_{0n} , D_{0n} und E_{0n} aus den Gleichungen (6.28) bis (6.33). Nachdem die Neutronenpopulationen n_1 und n_2 nicht von τ_0 abhängig sein dürfen, ergeben sich folgende Gleichungen zur Bestimmung der Unbekannten.

$$\varepsilon_1 \left(\frac{\partial A_{0n}}{\partial \tau_1} - \frac{b_1}{e_{ean}} A_{0n} + \frac{\partial B_{0n}}{\partial \tau_1} - \frac{b_1}{e_{ecn}} B_{0n} \right) + \varepsilon_2 \left(\frac{\partial A_{0n}}{\partial \tau_2} - \frac{b_2}{e_{ean}} A_{0n} + \frac{\partial B_{0n}}{\partial \tau_2} - \frac{b_2}{e_{ecn}} B_{0n} \right) = 0 \quad (6.65)$$

$n = 1..4$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \left(K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) j_{ean} \frac{\partial A_{0n}}{\partial \tau_1} e^{e_{ean} \tau_0} + \varepsilon_1 \left(K_{x3} e^{e_c \xi} - K_{x4} e^{-e_c \xi} \right) j_{ecn} \frac{\partial B_{0n}}{\partial \tau_1} e^{e_{ecn} \tau_0} \\ + \varepsilon_1 \frac{\partial C_{0n}}{\partial \tau_1} e^{-s_1 \tau_0} + \varepsilon_2 \left(K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) j_{ean} \frac{\partial A_{0n}}{\partial \tau_1} e^{e_{ean} \tau_0} \\ + \varepsilon_2 \left(K_{x3} e^{e_c \xi} - K_{x4} e^{-e_c \xi} \right) j_{ecn} \frac{\partial B_{0n}}{\partial \tau_1} e^{e_{ecn} \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial C_{0n}}{\partial \tau_2} e^{-s_1 \tau_0} = 0 \quad n = 1..4 \end{aligned} \quad (6.66)$$

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon_l (K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi}) k_{ean} \frac{\partial A_{0n}}{\partial \tau_1} e^{e_{ean} \tau_0} + \varepsilon_l (K_{x3} e^{e_c \xi} - K_{x4} e^{-e_c \xi}) k_{ecn} \frac{\partial B_{0n}}{\partial \tau_1} e^{e_{ecn} \tau_0} \\
 & + \varepsilon_l \frac{\partial D_{0n}}{\partial \tau_1} e^{-s_l \tau_0} + \varepsilon_2 (K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi}) k_{ean} \frac{\partial A_{0n}}{\partial \tau_1} e^{e_{ean} \tau_0} \\
 & + \varepsilon_2 (K_{x3} e^{e_c \xi} - K_{x4} e^{-e_c \xi}) k_{ecn} \frac{\partial B_{0n}}{\partial \tau_1} e^{e_{ecn} \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial D_{0n}}{\partial \tau_2} e^{-s_l \tau_0} = 0 \quad n = 1..4
 \end{aligned} \tag{6.67}$$

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon_l (K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi}) l_{ean} \frac{\partial A_{0n}}{\partial \tau_1} e^{e_{ean} \tau_0} + \varepsilon_l (K_{x3} e^{e_c \xi} - K_{x4} e^{-e_c \xi}) l_{ecn} \frac{\partial B_{0n}}{\partial \tau_1} e^{e_{ecn} \tau_0} \\
 & + \varepsilon_l \frac{\partial E_{0n}}{\partial \tau_1} e^{-s_l \tau_0} + \varepsilon_2 (K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi}) l_{ean} \frac{\partial A_{0n}}{\partial \tau_1} e^{e_{ean} \tau_0} \\
 & + \varepsilon_2 (K_{x3} e^{e_c \xi} - K_{x4} e^{-e_c \xi}) l_{ecn} \frac{\partial B_{0n}}{\partial \tau_1} e^{e_{ecn} \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial E_{0n}}{\partial \tau_2} e^{-s_l \tau_0} = 0 \quad n = 1..4
 \end{aligned} \tag{6.68}$$

Die Lösungen dieser Gleichungen definieren die Unbekannten A_{0n} , B_{0n} , C_{0n} , D_{0n} und E_{0n} als Funktionen von τ_1 und τ_2 , diese Lösungen gelten für $a_k < 0$ können aber problemlos auch für $a_k > 0$ weiterentwickelt werden. Dafür müssen lediglich die von a_k abhängigen Funktionen vertauscht werden. Die Unbekannten C_{0n} , D_{0n} und E_{0n} sind ebenfalls von a_k abhängig, definieren sich aber analog. Diese Funktionen kürzen sich größtenteils mit den Lösungen für j_0 , k_0 und l_0 , dadurch werden die Terme für die Abhängigkeit des Neutronenstromes und der höheren Neutronenflussmomente von der Produktion der prompten Neutronen eliminiert.

$$A_{0n}(\tau_1, \tau_2) = F_{ea0n} e^{\frac{b_1}{e_{ean}} \tau_1 + \frac{b_2}{e_{ean}} \tau_2} \quad n = 1..4 \tag{6.69}$$

$$B_{0n}(\tau_1, \tau_2) = F_{ec0n} e^{\frac{b_1}{e_{ecn}} \tau_1 + \frac{b_2}{e_{ecn}} \tau_2} \quad n = 1..4 \tag{6.70}$$

$$\begin{aligned}
 C_{0n}(\tau_1, \tau_2) = & -j_{ean} F_{ea0n} e^{\frac{b_1}{e_{ean}} \tau_1 + \frac{b_2}{e_{ean}} \tau_2} e^{e_{ean} + s_l \tau_0} (K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi}) \\
 & - j_{ecn} F_{ec0n} e^{\frac{b_1}{e_{ecn}} \tau_1 + \frac{b_2}{e_{ecn}} \tau_2} e^{e_{ecn} + s_l \tau_0} (K_{x3} e^{e_c \xi} - K_{x4} e^{-e_c \xi}) + C_{1n} \quad n = 1..4
 \end{aligned} \tag{6.71}$$

$$\begin{aligned}
 D_{0n}(\tau_1, \tau_2) = & -k_{ean} F_{ea0n} e^{\frac{b_1}{e_{ean}} \tau_1 + \frac{b_2}{e_{ean}} \tau_2} e^{e_{ean} + s_2 \tau_0} (K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi}) \\
 & - k_{ecn} F_{ec0n} e^{\frac{b_1}{e_{ecn}} \tau_1 + \frac{b_2}{e_{ecn}} \tau_2} e^{e_{ecn} + s_2 \tau_0} (K_{x3} e^{e_c \xi} + K_{x4} e^{-e_c \xi}) + C_{2n} \quad n = 1..4
 \end{aligned} \tag{6.72}$$

$$\begin{aligned}
 E_{0n}(\tau_1, \tau_2) = & -l_{ean} F_{ea0n} e^{\frac{b_1}{e_{ean}} \tau_1 + \frac{b_2}{e_{ean}} \tau_2} e^{e_{ean} + s_3 \tau_0} (K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi}) \\
 & - l_{ecn} F_{ec0n} e^{\frac{b_1}{e_{ecn}} \tau_1 + \frac{b_2}{e_{ecn}} \tau_2} e^{e_{ecn} + s_3 \tau_0} (K_{x3} e^{e_c \xi} - K_{x4} e^{-e_c \xi}) + C_{3n} \quad n = 1..4
 \end{aligned} \tag{6.73}$$

Diese Gleichungen (6.69) und (6.70) enthalten Informationen über die Auswirkung der Produktion verzögerter Neutronen auf die Anpassung des Systems im kurzen Zeithorizont, dem Zeitbereich des sogenannten „Prompt Jump“.

Unter Verwendung der Ergebnisse für A_{0n} , B_{0n} , C_{0n} , D_{0n} und E_{0n} reduzieren sich die Gleichungen (6.60) bis (6.63) folgendermaßen:

$$\varepsilon_1 \frac{\partial f_1}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial f_2}{\partial \tau_0} + \varepsilon_1 \frac{\partial j_1}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \frac{\partial j_2}{\partial \xi} - \varepsilon_1 (a_k + a) f_1 - \varepsilon_2 (a_k + a) f_2 = \varepsilon_1 B_{10}(\xi) + \varepsilon_2 B_{20}(\xi) \quad (6.74)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial j_1}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial j_2}{\partial \tau_0} + \varepsilon_1 \frac{1}{3} \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \frac{1}{3} \frac{\partial f_2}{\partial \xi} + \varepsilon_1 \frac{2}{3} \frac{\partial k_1}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \frac{2}{3} \frac{\partial k_2}{\partial \xi} + \varepsilon_1 s_1 j_1 + \varepsilon_2 s_1 j_2 = 0 \quad (6.75)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial k_1}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial k_2}{\partial \tau_0} + \varepsilon_1 \frac{2}{5} \frac{\partial j_1}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \frac{2}{5} \frac{\partial j_2}{\partial \xi} + \varepsilon_1 \frac{3}{5} \frac{\partial l_1}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \frac{3}{5} \frac{\partial l_2}{\partial \xi} + \varepsilon_1 s_2 k_1 + \varepsilon_2 s_2 k_2 = 0 \quad (6.76)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial l_1}{\partial \tau_0} + \varepsilon_2 \frac{\partial l_2}{\partial \tau_0} + \varepsilon_1 \frac{3}{7} \frac{\partial k_1}{\partial \xi} + \varepsilon_2 \frac{3}{7} \frac{\partial k_2}{\partial \xi} + \varepsilon_1 s_3 l_1 + \varepsilon_2 s_3 l_2 = 0 \quad (6.77)$$

mit

$$B_{10}(\xi) = b_{01ea} (K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi}) + b_{01ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} + K_{d4} e^{-e_c \xi}) \quad (6.78)$$

$$B_{20}(\xi) = b_{02ea} (K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi}) + b_{02ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} + K_{d4} e^{-e_c \xi}) \quad (6.79)$$

Die Definition für die räumliche Verteilung der verzögerten Neutronen wird wie bereits in Abschnitt 4.1.2 diskutiert verwendet.

Die Lösung der Differentialgleichung ergibt folgende Ergebnisse für die Neutronenpopulationen n_1 und n_2 und die Neutronenströme j_1 und j_2 und der höheren Neutronenflussmomente k_1 , k_2 und l_1 , l_2 in den Zeitskalen des Zerfalls der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen

Die Lösung lautet:

- für $a_k < 0$:

$$f_1 = (K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi}) A_{1n} e^{e_{ean} \tau_0} + z_{1ea} b_{01ea} (K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi}) + (K_{x3} e^{e_c \xi} + K_{x4} e^{-e_c \xi}) B_{1n} e^{e_{ecn} \tau_0} + z_{1ec} b_{01ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} + K_{d4} e^{-e_c \xi}) \quad n = 1..4 \quad (6.80)$$

$$f_2 = (K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi}) A_{2n} e^{e_{ean} \tau_0} + z_{2ea} b_{02ea} (K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi}) + (K_{x3} e^{e_c \xi} + K_{x4} e^{-e_c \xi}) B_{2n} e^{e_{ecn} \tau_0} + z_{2ec} b_{02ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} + K_{d4} e^{-e_c \xi}) \quad n = 1..4 \quad (6.81)$$

$$j_1 = (K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi}) j_{ean} A_{1n} e^{e_{ean} \tau_0} + z_{2ea} b_{01ea} (K_{d1} e^{e_a \xi} - K_{d2} e^{-e_a \xi}) + (K_{x3} e^{e_c \xi} - K_{x4} e^{-e_c \xi}) j_{ecn} B_{1n} e^{e_{ecn} \tau_0} + z_{2ec} b_{01ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} - K_{d4} e^{-e_c \xi}) \quad n = 1..4 \quad (6.82)$$

$$j_2 = (K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi}) j_{ean} A_{2n} e^{e_{ean} \tau_0} + z_{2ea} b_{02ea} (K_{d1} e^{e_a \xi} - K_{d2} e^{-e_a \xi}) + (K_{x3} e^{e_c \xi} - K_{x4} e^{-e_c \xi}) j_{ecn} B_{2n} e^{e_{ecn} \tau_0} + z_{2ec} b_{02ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} - K_{d4} e^{-e_c \xi}) \quad n = 1..4 \quad (6.83)$$

$$k_1 = (K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi}) k_{ean} A_{1n} e^{e_{ean} \tau_0} + z_{3ea} b_{01ea} (K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi}) + (K_{x3} e^{e_c \xi} + K_{x4} e^{-e_c \xi}) k_{ecn} B_{1n} e^{e_{ecn} \tau_0} + z_{3ec} b_{01ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} + K_{d4} e^{-e_c \xi}) \quad n = 1..4 \quad (6.84)$$

$$k_2 = (K_{x1}e^{e_a\xi} + K_{x2}e^{-e_a\xi})k_{ean}A_{2n}e^{e_{ean}\tau_0} + z_{3ea}b_{02ea}(K_{d1}e^{e_a\xi} + K_{d2}e^{-e_a\xi}) \\ + (K_{x3}e^{e_c\xi} + K_{x4}e^{-e_c\xi})k_{ecn}B_{2n}e^{e_{ecn}\tau_0} + z_{3ec}b_{02ec}(K_{d3}e^{e_c\xi} + K_{d4}e^{-e_c\xi}) \quad n = 1..4 \quad (6.85)$$

$$l_1 = (K_{x1}e^{e_a\xi} - K_{x2}e^{-e_a\xi})l_{ean}A_{1n}e^{e_{ean}\tau_0} + z_{4ea}b_{01ea}(K_{d1}e^{e_a\xi} - K_{d2}e^{-e_a\xi}) \\ + (K_{x3}e^{e_c\xi} - K_{x4}e^{-e_c\xi})l_{ecn}B_{1n}e^{e_{ecn}\tau_0} + z_{4ec}b_{01ec}(K_{d3}e^{e_c\xi} - K_{d4}e^{-e_c\xi}) \quad n = 1..4 \quad (6.86)$$

$$l_2 = (K_{x1}e^{e_a\xi} - K_{x2}e^{-e_a\xi})l_{ean}A_{2n}e^{e_{ean}\tau_0} + z_{4ea}b_{02ea}(K_{d1}e^{e_a\xi} - K_{d2}e^{-e_a\xi}) \\ + (K_{x3}e^{e_c\xi} - K_{x4}e^{-e_c\xi})l_{ecn}B_{2n}e^{e_{ecn}\tau_0} + z_{4ec}b_{02ec}(K_{d3}e^{e_c\xi} - K_{d4}e^{-e_c\xi}) \quad n = 1..4 \quad (6.87)$$

mit

$$z_{1ea} = -\frac{1}{a} \quad (6.88)$$

$$z_{2ea} = -\frac{a_k}{ae_a} \quad (6.89)$$

$$z_{3ea} = \frac{3a_k s_1 + e_a^2}{2e_a^2 a} \quad (6.90)$$

$$z_{4ea} = -\frac{-4a_k e_a^2 + 15a_k s_1 s_2 + 5e_a^2 s_2}{6e_a^3 a} \quad (6.91)$$

und

$$z_{1ec} = -\frac{1}{a} \quad (6.92)$$

$$z_{2ec} = -\frac{a_k}{ae_c} \quad (6.93)$$

$$z_{3ec} = \frac{3a_k s_1 + e_c^2}{2e_c^2 a} \quad (6.94)$$

$$z_{4ec} = -\frac{-4a_k e_c^2 + 15a_k s_1 s_2 + 5e_c^2 s_2}{6e_c^3 a} \quad (6.95)$$

- für $a_k < 0$:

$$f_1 = [K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi)] A_{1n} e^{e_{tan}\tau_0} + z_{1ta} b_{01ta} [K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi)] \\ + (K_{x3} e^{e_c \xi} + K_{x4} e^{-e_c \xi}) B_{1n} e^{e_{ecn}\tau_0} + z_{1ec} b_{01ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} + K_{d4} e^{-e_c \xi}) \quad n = 1..4 \quad (6.96)$$

$$f_2 = [K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi)] A_{2n} e^{e_{tan}\tau_0} + z_{1ta} b_{02ta} [K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi)] \\ + (K_{x3} e^{e_c \xi} + K_{x4} e^{-e_c \xi}) B_{2n} e^{e_{ecn}\tau_0} + z_{1ec} b_{02ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} + K_{d4} e^{-e_c \xi}) \quad n = 1..4 \quad (6.97)$$

$$\begin{aligned}
 j_1 = & [K_{x1} \sin(x_t \xi) - K_{x2} \cos(x_t \xi)] j_{ean} A_{1n} e^{e_{tan} \tau_0} + z_{2ta} b_{01ta} [K_{d1} \sin(x_t \xi) - K_{d2} \cos(x_t \xi)] \\
 & + (K_{x3} e^{e_c \xi} - K_{x4} e^{-e_c \xi}) j_{ecn} B_{1n} e^{e_{ecn} \tau_0} + z_{2ec} b_{01ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} - K_{d4} e^{-e_c \xi}) \quad n = 1..4
 \end{aligned} \quad (6.98)$$

$$\begin{aligned}
 j_2 = & [K_{x1} \sin(x_t \xi) - K_{x2} \cos(x_t \xi)] j_{ean} A_{2n} e^{e_{tan} \tau_0} + z_{2ta} b_{02ta} [K_{d1} \sin(x_t \xi) - K_{d2} \cos(x_t \xi)] \\
 & + (K_{x3} e^{e_c \xi} - K_{x4} e^{-e_c \xi}) j_{ecn} B_{2n} e^{e_{ecn} \tau_0} + z_{2ec} b_{02ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} - K_{d4} e^{-e_c \xi}) \quad n = 1..4
 \end{aligned} \quad (6.99)$$

$$\begin{aligned}
 k_1 = & [K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi)] k_{ean} A_{1n} e^{e_{tan} \tau_0} + z_{3ta} b_{01ta} [K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi)] \\
 & + (K_{x3} e^{e_c \xi} - K_{x4} e^{-e_c \xi}) k_{ecn} B_{1n} e^{e_{ecn} \tau_0} + z_{3ec} b_{01ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} - K_{d4} e^{-e_c \xi}) \quad n = 1..4
 \end{aligned} \quad (6.100)$$

$$\begin{aligned}
 k_2 = & [K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi)] k_{ean} A_{2n} e^{e_{tan} \tau_0} + z_{3ta} b_{02ta} [K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi)] \\
 & + (K_{x3} e^{e_c \xi} - K_{x4} e^{-e_c \xi}) k_{ecn} B_{2n} e^{e_{ecn} \tau_0} + z_{3ec} b_{02ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} - K_{d4} e^{-e_c \xi}) \quad n = 1..4
 \end{aligned} \quad (6.101)$$

$$\begin{aligned}
 l_1 = & [K_{x1} \sin(x_t \xi) - K_{x2} \cos(x_t \xi)] l_{ean} A_{1n} e^{e_{tan} \tau_0} + z_{4ta} b_{01ta} [K_{d1} \sin(x_t \xi) - K_{d2} \cos(x_t \xi)] \\
 & + (K_{x3} e^{e_c \xi} - K_{x4} e^{-e_c \xi}) l_{ecn} B_{1n} e^{e_{ecn} \tau_0} + z_{4ec} b_{01ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} - K_{d4} e^{-e_c \xi}) \quad n = 1..4
 \end{aligned} \quad (6.102)$$

$$\begin{aligned}
 l_2 = & [K_{x1} \sin(x_t \xi) - K_{x2} \cos(x_t \xi)] l_{ean} A_{2n} e^{e_{tan} \tau_0} + z_{4ta} b_{02ta} [K_{d1} \sin(x_t \xi) - K_{d2} \cos(x_t \xi)] \\
 & + (K_{x3} e^{e_c \xi} - K_{x4} e^{-e_c \xi}) l_{ecn} B_{2n} e^{e_{ecn} \tau_0} + z_{4ec} b_{02ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} - K_{d4} e^{-e_c \xi}) \quad n = 1..4
 \end{aligned} \quad (6.103)$$

mit

$$z_{1ta} = -\frac{1}{a} \quad (6.104)$$

$$z_{2ta} = -\frac{a_k}{ax_t} \quad (6.105)$$

$$z_{3ta} = \frac{x_t^2 - 3a_k s_1}{2x_t^2 a} \quad (6.106)$$

$$z_{4ta} = \frac{4a_k x_t^2 + 15a_k s_1 s_2 - 5x_t^2 s_2}{6x_t^3 a} \quad (6.107)$$

und den Variablen z_{nec} die bereits in den Gleichungen (6.92), (6.93), (6.94) und (6.95) definiert sind.

In den folgenden Schritten müssen die Gleichungen der ersten Ordnung in ε zur Bestimmung der Veränderung der Konzentrationen der Vorläuferkerne der beiden Gruppen verzögerter Neutronen c_{11} , c_{12} , c_{21} und c_{22} Gl.(6.64) gelöst werden.

Analog der Lösung für die punktkinetischen Gleichungen (Abschnitt 3.1.2) müssen die Ergebnisse für n_1 und n_2 , für c_{10} und c_{20} und die abgeleiteten Ergebnisse für c_{10} und c_{20} in die Gleichungen der ersten Ordnung für ε eingesetzt werden. Die entstehenden Gleichungen liefern dann die folgenden Bedingungen zur Bestimmung der Variablen b_{01} und b_{02} die Konstanten in τ_0 aber Funktionen in τ_1 und τ_2 sein können. Die Entwicklung verläuft identisch mit den Entwicklungen für die P₁ und die Diffusionsgleichung (siehe (5.73) bis (5.76)). Die Gleichungen für b_{01} und b_{02} sind somit in der hier ermittelten Lösung für die P₃ Transportgleichung identisch mit den Gleichungen für die Lösung der P₁ – und der Diffusionsgleichung, die in den vorhergehenden Abschnitten ermittelt wurden. Dies bedeutet, dass das Langzeitverhalten der Näherungslösung, das durch die Änderung der Produktion der verzögerten Neutronen bestimmt wird, für die P₃ – wie für die P₁ Transport- und die Diffusionsgleichung ebenfalls identisch sein wird.

An dieser Stelle wird die Expansion, aus den bereits im Abschnitt 4.1.2 erläuterten Gründen, abgebrochen. Die benötigten Konstanten K_{B1} und K_{B2} müssen mit Hilfe der Anfangsbedingungen bestimmt werden. Zur Behandlung der Singularität und der Verbesserung der Expansionslösung werden die Korrekturen direkt aus Abschnitt 3.1.2 übernommen (siehe Gl. (3.47), (3.48) und (3.49)).

Die Gesamtlösung für den Neutronenfluss ϕ , kann Gleichung (6.18) folgend, aus den einzelnen Lösungen, zusammengesetzt werden. Der Neutronenfluss in der Zeitskala der prompten Neutronenproduktion f_0 ergibt sich aus den Gleichungen (6.28) und jeweils (6.69) und (6.70). Der Neutronenfluss in der Zeitskala des Zerfalls der Vorläuferkerne der ersten Gruppe verzögerter Neutronen f_1 ergibt sich aus den Gleichungen (6.80) und jeweils (4.76). Der Neutronenfluss in der Zeitskala des Zerfalls der Vorläuferkerne der zweiten Gruppe verzögerter Neutronen f_2 ergibt sich aus den Gleichungen (6.81) und jeweils (4.77). Werden diese Gleichungen alle zusammengefügt, ergeben sich für den gesamten Neutronenfluss ϕ folgende Gleichungen. Um die Ergebnisse lesbar darzustellen sind hier bereits die gleich Null gesetzten Konstanten berücksichtigt und die b_{01} und b_{02} Terme nicht ausgeschrieben.

für $a_k < 0$:

$$\begin{aligned}
 \phi &= f_0 + \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2 = \\
 &\left(K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) \sum_n F_{ea0n} e^{\frac{b_1}{e_{ean}} \tau_1 + \frac{b_2}{e_{ean}} \tau_2} e^{e_{ean} \tau_0} \\
 &+ \left(K_{x3} e^{e_c \xi} + K_{x4} e^{-e_c \xi} \right) \sum_n F_{ec0n} e^{\frac{b_1}{e_{ecn}} \tau_1 + \frac{b_2}{e_{ecn}} \tau_2} e^{e_{ecn} \tau_0} \\
 &+ \varepsilon_1 z_{lea} \left(K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi} \right) b_{01} + \varepsilon_1 z_{lec} \left(K_{d3} e^{e_c \xi} + K_{d4} e^{-e_c \xi} \right) b_{01} \\
 &+ \varepsilon_2 z_{lea} \left(K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi} \right) b_{02} + \varepsilon_2 z_{lec} \left(K_{d3} e^{e_c \xi} + K_{d4} e^{-e_c \xi} \right) b_{02}
 \end{aligned} \tag{6.108}$$

$n = 1..4$

- Die Lösungen für $a_k > 0$ können analog zusammengesetzt werden. Die Lösungen sind nur in Teilen von a_k abhängig. Die erste Teillösung (mit Index a) ist vom Vorzeichen von a_k abhängig und verändert sich in eine Lösung auf Basis trigonometrischer Funktionen, während die zweite Teillösung unabhängig von a_k auf Exponentialfunktionen beruht.

$$\begin{aligned}
 \phi &= f_0 + \varepsilon_1 f_1 + \varepsilon_2 f_2 = \\
 &[K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi)] \sum_n F_{ta0n} e^{\frac{b_1}{e_{ean}} \tau_1 + \frac{b_2}{e_{ean}} \tau_2} e^{e_{tan} \tau_0} \\
 &+ (K_{x3} e^{e_c \xi} + K_{x4} e^{-e_c \xi}) \sum_n F_{ec0n} e^{\frac{b_1}{e_{ecn}} \tau_1 + \frac{b_2}{e_{ecn}} \tau_2} e^{e_{ecn} \tau_0} \\
 &+ \varepsilon_1 z_{1ta} [K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi)] b_{01} + \varepsilon_1 z_{1ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} + K_{d4} e^{-e_c \xi}) b_{01} \\
 &+ \varepsilon_2 z_{1ta} [K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi)] b_{02} + \varepsilon_2 z_{1ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} + K_{d4} e^{-e_c \xi}) b_{02} \\
 & \quad \quad \quad n = 1..4
 \end{aligned} \tag{6.109}$$

Die Gesamtlösung für den Neutronenstrom j , kann Gleichung (6.19) folgend aus den einzelnen Lösungen zusammengesetzt werden. Der Neutronenstrom in der Zeitskala der prompten Neutronenproduktion j_0 ergibt sich aus den Gleichungen (6.29) und jeweils (6.69), (6.70) und (6.71). Der Neutronenstrom in der Zeitskala des Zerfalls der Vorläuferkerne der ersten Gruppe verzögerter Neutronen j_1 ergibt sich aus den Gleichungen (6.82) und jeweils (4.76). Der Neutronenfluss in der Zeitskala des Zerfalls der Vorläuferkerne der zweiten Gruppe verzögerter Neutronen j_2 ergibt sich aus den Gleichungen (6.83) und jeweils (4.77). Werden diese Gleichungen alle zusammengefügt, ergeben sich für den gesamten Neutronenstrom j folgende Gleichungen:

- für $a_k < 0$:

$$\begin{aligned}
 j &= j_0 + \varepsilon_1 j_1 + \varepsilon_2 j_2 = \\
 &\varepsilon_1 z_{2ea} (K_{d1} e^{e_a \xi} - K_{d2} e^{-e_a \xi}) b_{01} + \varepsilon_1 z_{2ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} - K_{d4} e^{-e_c \xi}) b_{01} \\
 &+ \varepsilon_2 z_{2ea} (K_{d1} e^{e_a \xi} - K_{d2} e^{-e_a \xi}) b_{02} + \varepsilon_2 z_{2ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} - K_{d4} e^{-e_c \xi}) b_{02}
 \end{aligned} \tag{6.110}$$

- für $a_k > 0$:

$$\begin{aligned}
 j &= j_0 + \varepsilon_1 j_1 + \varepsilon_2 j_2 = \\
 &\varepsilon_1 z_{2ta} [K_{d1} \sin(x_t \xi) - K_{d2} \cos(x_t \xi)] b_{01} + \varepsilon_1 z_{2ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} - K_{d4} e^{-e_c \xi}) b_{01} \\
 &+ \varepsilon_2 z_{2ta} [K_{d1} \sin(x_t \xi) - K_{d2} \cos(x_t \xi)] b_{02} + \varepsilon_2 z_{2ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} - K_{d4} e^{-e_c \xi}) b_{02}
 \end{aligned} \tag{6.111}$$

Die Gesamtlösung für die höheren Neutronenflussmomente k und l , kann den Gleichungen (6.20) und (6.21) folgend aus den einzelnen Lösungen zusammengesetzt werden. Die höheren Neutronenflussmomente in der Zeitskala der prompten Neutronenproduktion k_0 und l_0 ergeben sich aus den Gleichungen (6.30) und (6.31) und jeweils (6.69), (6.70) und (6.72) und (6.73). Die höheren Neutronenflussmomente in der Zeitskala des Zerfalls der Vorläuferkerne der ersten Gruppe verzögerter Neutronen k_1 und l_1 ergeben sich aus den Gleichungen (6.84) und (6.86) und jeweils (4.76). Der Neutronenfluss in der Zeitskala des Zerfalls der Vorläuferkerne der zweiten Gruppe verzögerter Neutronen k_2 und l_2 ergibt sich aus den Gleichungen (6.85) und (6.87) und jeweils (4.77). Werden diese Gleichungen alle zusammengefügt, ergeben sich für die höheren Neutronenflussmomente k und l folgende Gleichungen:

- für $a_k < 0$:

$$\begin{aligned}
 k &= k_0 + \varepsilon_1 k_1 + \varepsilon_2 k_2 = \\
 &\varepsilon_1 z_{3ea} (K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi}) b_{01} + \varepsilon_1 z_{3ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} + K_{d4} e^{-e_c \xi}) b_{01} \\
 &+ \varepsilon_2 z_{3ea} (K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi}) b_{02} + \varepsilon_2 z_{3ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} + K_{d4} e^{-e_c \xi}) b_{02}
 \end{aligned} \tag{6.112}$$

$$\begin{aligned}
 l &= l_0 + \varepsilon_1 l_1 + \varepsilon_2 l_2 = \\
 &\varepsilon_1 z_{4ea} (K_{d1} e^{e_a \xi} - K_{d2} e^{-e_a \xi}) b_{01} + \varepsilon_1 z_{4ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} - K_{d4} e^{-e_c \xi}) b_{01} \\
 &+ \varepsilon_2 z_{4ea} (K_{d1} e^{e_a \xi} - K_{d2} e^{-e_a \xi}) b_{02} + \varepsilon_2 z_{4ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} - K_{d4} e^{-e_c \xi}) b_{02}
 \end{aligned} \tag{6.113}$$

- für $a_k > 0$:

$$\begin{aligned}
 k &= k_0 + \varepsilon_1 k_1 + \varepsilon_2 k_2 = \\
 &\varepsilon_1 z_{3ta} [K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi)] b_{01} + \varepsilon_1 z_{3ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} - K_{d4} e^{-e_c \xi}) b_{01} \\
 &+ \varepsilon_2 z_{3ta} [K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi)] b_{02} + \varepsilon_2 z_{3ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} - K_{d4} e^{-e_c \xi}) b_{02}
 \end{aligned} \tag{6.114}$$

$$\begin{aligned}
 l &= l_0 + \varepsilon_1 l_1 + \varepsilon_2 l_2 = \\
 &\varepsilon_1 z_{4ta} [K_{d1} \sin(x_t \xi) - K_{d2} \cos(x_t \xi)] b_{01} + \varepsilon_1 z_{4ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} - K_{d4} e^{-e_c \xi}) b_{01} \\
 &+ \varepsilon_2 z_{4ta} [K_{d1} \sin(x_t \xi) - K_{d2} \cos(x_t \xi)] b_{02} + \varepsilon_2 z_{4ec} (K_{d3} e^{e_c \xi} - K_{d4} e^{-e_c \xi}) b_{02}
 \end{aligned} \tag{6.115}$$

Die Gesamtlösung für die Konzentration der Vorläuferkerne c_1 und c_2 kann nach den Gleichungen (6.22) folgendermaßen zusammengesetzt werden. Werden in die Gleichungen (6.32) und (6.33) jeweils die Lösungen für die Konstanten A_{0n} und B_{0n} (Gl. (6.69) und (6.70)) und entsprechend B_{10} (Gl. (6.78)) oder B_{20} (Gl. (6.79)) eingesetzt, ergeben sich:

- für $a_k < 0$:

$$\begin{aligned}
 c_I &= c_{I0} = \\
 &\left(K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) \sum_n \frac{b_1}{e_{ean}} F_{ea0n} e^{\frac{b_1}{e_{ean}} \tau_1 + \frac{b_2}{e_{ean}} \tau_2} e^{e_{ean} \tau_0} \\
 &+ \left(K_{x3} e^{e_c \xi} + K_{x4} e^{-e_c \xi} \right) \sum_n \frac{b_1}{e_{ecn}} F_{ec0n} e^{\frac{b_1}{e_{ecn}} \tau_1 + \frac{b_2}{e_{ecn}} \tau_2} e^{e_{ecn} \tau_0} \\
 &+ \left(K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi} \right) b_{01} + \left(K_{d3} e^{e_c \xi} + K_{d4} e^{-e_c \xi} \right) b_{01}
 \end{aligned} \tag{6.116}$$

$n = 1..4$

$$c_2 = c_{20} =$$

$$\begin{aligned} & \left(K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi} \right) \sum_n \frac{b_2}{e_{ean}} F_{ea0n} e^{\frac{b_1}{e_{ean}} \tau_1 + \frac{b_2}{e_{ean}} \tau_2} e^{e_{ean} \tau_0} \\ & + \left(K_{x3} e^{e_c \xi} + K_{x4} e^{-e_c \xi} \right) \sum_n \frac{b_2}{e_{ecn}} F_{ec0n} e^{\frac{b_1}{e_{ecn}} \tau_1 + \frac{b_2}{e_{ecn}} \tau_2} e^{e_{ecn} \tau_0} \\ & + \left(K_{d1} e^{e_a \xi} + K_{d2} e^{-e_a \xi} \right) b_{02} + \left(K_{d3} e^{e_c \xi} + K_{d4} e^{-e_c \xi} \right) b_{02} \end{aligned} \quad (6.117)$$

$n = 1..4$

- für $a_k > 0$:

$$c_1 = c_{10} =$$

$$\begin{aligned} & \left[K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi) \right] \sum_n \frac{b_1}{e_{tan}} F_{ta0n} e^{\frac{b_1}{e_{tan}} \tau_1 + \frac{b_2}{e_{tan}} \tau_2} e^{e_{tan} \tau_0} \\ & + \left(K_{x3} e^{e_c \xi} + K_{x4} e^{-e_c \xi} \right) \sum_n \frac{b_1}{e_{tcn}} F_{ec0n} e^{\frac{b_1}{e_{tcn}} \tau_1 + \frac{b_2}{e_{tcn}} \tau_2} e^{e_{tcn} \tau_0} \\ & + \left[K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi) \right] b_{01} + \left(K_{d3} e^{e_c \xi} + K_{d4} e^{-e_c \xi} \right) b_{01} \end{aligned} \quad (6.118)$$

$n = 1..4$

$$c_2 = c_{20} =$$

$$\begin{aligned} & \left[K_{x1} \cos(x_t \xi) + K_{x2} \sin(x_t \xi) \right] \sum_n \frac{b_2}{e_{tan}} F_{ta0n} e^{\frac{b_1}{e_{tan}} \tau_1 + \frac{b_2}{e_{tan}} \tau_2} e^{e_{tan} \tau_0} \\ & + \left(K_{x3} e^{e_c \xi} + K_{x4} e^{-e_c \xi} \right) \sum_n \frac{b_2}{e_{tcn}} F_{ec0n} e^{\frac{b_1}{e_{tcn}} \tau_1 + \frac{b_2}{e_{tcn}} \tau_2} e^{e_{tcn} \tau_0} \\ & + \left[K_{d1} \cos(x_t \xi) + K_{d2} \sin(x_t \xi) \right] b_{02} + \left(K_{d3} e^{e_c \xi} + K_{d4} e^{-e_c \xi} \right) b_{02} \end{aligned} \quad (6.119)$$

$n = 1..4$

Die Konstanten A_{1n} , A_{2n} , B_{1n} , B_{2n} , C_n festgelegt, die Konstanten F_{x0n} , K_{B1} und K_{B2} müssen mit Hilfe der Anfangsbedingungen f_{x0} , j_{x0} , k_{x0} , l_{x0} , c_{01} und c_{02} bestimmt werden.

$$A_{x1n} = A_{x2n} = 0 \quad n = 1..4, \quad x = ea, ec, ta \quad (6.120)$$

$$C_{1n} = C_{2n} = C_{3n} = 0 \quad n = 1..4 \quad (6.121)$$

$$\begin{aligned} F_{x01} = & - (K_{t1} + K_{t3}) (-l_{x2} j_{x3} k_{x0} + l_{x2} j_{x4} k_{x0} - l_{x3} k_{x2} j_{x0} + j_{x0} l_{x3} k_{x4} - j_{x4} l_{x3} k_{x0} \\ & + j_{x2} l_{x3} k_{x0} - l_{x2} j_{x0} k_{x4} + j_{x0} k_{x2} l_{x4} + j_{x2} l_{x0} k_{x4} + f_{x0} l_{x3} k_{x2} j_{x4} + f_{x0} l_{x2} j_{x3} k_{x4} \\ & - j_{x2} l_{x4} k_{x0} - j_{x4} k_{x2} l_{x0} - f_{x0} k_{x3} l_{x2} j_{x4} - f_{x0} j_{x2} l_{x3} k_{x4} - j_{x2} k_{x3} l_{x0} + k_{x3} l_{x2} j_{x0} \\ & + k_{x2} j_{x3} l_{x0} + f_{x0} j_{x2} k_{x3} l_{x4} - f_{x0} k_{x2} j_{x3} l_{x4} + j_{x3} l_{x4} k_{x0} - j_{x3} l_{x0} k_{x4} + j_{x4} k_{x3} l_{x0} \\ & - j_{x0} k_{x3} l_{x4}) / den \end{aligned} \quad (6.122)$$

$$x = ea, ec, ta$$

$$\begin{aligned}
 F_{x02} = & (K_{t1} + K_{t3}) (j_{x1} l_{x0} k_{x4} - j_{x1} l_{x4} k_{x0} - j_{x1} f_{x0} l_{x3} k_{x4} + j_{x1} l_{x3} k_{x0} - j_{x1} k_{x3} l_{x0} \\
 & + j_{x1} f_{x0} k_{x3} l_{x4} - j_{x4} k_{x1} l_{x0} - l_{x1} j_{x3} k_{x0} + j_{x0} l_{x3} k_{x4} - j_{x4} l_{x3} k_{x0} + j_{x0} k_{x1} l_{x4} + j_{x4} l_{x1} k_{x0} \\
 & - j_{x0} l_{x1} k_{x4} + k_{x3} l_{x1} j_{x0} + k_{x1} j_{x3} l_{x0} - l_{x3} k_{x1} j_{x0} + f_{x0} l_{x3} k_{x1} j_{x4} - j_{x4} k_{x3} l_{x1} f_{x0} \\
 & - j_{x3} l_{x4} k_{x1} f_{x0} + j_{x3} l_{x1} f_{x0} k_{x4} + j_{x3} l_{x4} k_{x0} - j_{x3} l_{x0} k_{x4} + j_{x4} k_{x3} l_{x0} - j_{x0} k_{x3} l_{x4}) / den
 \end{aligned} \tag{6.123}$$

$x = ea, ec, ta$

$$\begin{aligned}
 F_{x03} = & - (K_{t1} + K_{t3}) (j_{x1} l_{x2} k_{x0} - j_{x1} l_{x2} f_{x0} k_{x4} + j_{x1} l_{x0} k_{x4} - j_{x1} l_{x4} k_{x0} + j_{x1} f_{x0} k_{x2} l_{x4} \\
 & - j_{x1} k_{x2} l_{x0} + l_{x2} j_{x4} k_{x1} f_{x0} - l_{x2} k_{x1} j_{x0} - l_{x2} j_{x4} k_{x0} + l_{x2} j_{x0} k_{x4} - j_{x2} l_{x1} k_{x0} + j_{x2} l_{x4} k_{x0} \\
 & + j_{x2} l_{x1} f_{x0} k_{x4} + k_{x2} l_{x1} j_{x0} - j_{x0} l_{x1} k_{x4} - j_{x2} l_{x0} k_{x4} - j_{x0} k_{x2} l_{x4} - j_{x4} l_{x1} k_{x2} f_{x0} \\
 & - j_{x4} k_{x1} l_{x0} + j_{x2} k_{x1} l_{x0} + j_{x4} l_{x1} k_{x0} + j_{x4} k_{x2} l_{x0} - j_{x2} l_{x4} k_{x1} f_{x0} + j_{x0} k_{x1} l_{x4}) / den
 \end{aligned} \tag{6.124}$$

$x = ea, ec, ta$

$$\begin{aligned}
 F_{x04} = & (K_{t1} + K_{t3}) (-j_{x2} l_{x1} k_{x0} - j_{x1} l_{x3} k_{x0} - l_{x2} j_{x3} k_{x0} - l_{x3} k_{x2} j_{x0} + l_{x1} j_{x3} k_{x0} + j_{x2} l_{x3} k_{x0} \\
 & + j_{x1} k_{x3} l_{x0} - j_{x1} k_{x2} l_{x0} - j_{x2} k_{x3} l_{x0} - l_{x3} j_{x2} k_{x1} f_{x0} - l_{x2} k_{x1} j_{x0} + k_{x3} j_{x2} l_{x1} f_{x0} \\
 & + k_{x1} j_{x3} l_{x2} f_{x0} + j_{x1} l_{x3} k_{x2} f_{x0} - k_{x3} l_{x1} j_{x0} - j_{x1} k_{x3} l_{x2} f_{x0} - l_{x1} j_{x3} k_{x2} f_{x0} + k_{x2} l_{x1} j_{x0} \\
 & + l_{x3} k_{x1} j_{x0} + j_{x1} l_{x2} k_{x0} + j_{x2} k_{x1} l_{x0} + k_{x3} l_{x2} j_{x0} - k_{x1} j_{x3} l_{x0} + k_{x2} j_{x3} l_{x0}) / den
 \end{aligned} \tag{6.125}$$

$x = ea, ec, ta$

$$\begin{aligned}
 den := & j_{x2} k_{x1} l_{x4} - j_{x2} k_{x3} l_{x4} - l_{x1} j_{x3} k_{x2} - k_{x3} l_{x1} j_{x4} + k_{x2} l_{x1} j_{x4} + k_{x3} j_{x2} l_{x1} - l_{x2} j_{x3} k_{x4} \\
 & - l_{x3} k_{x2} j_{x4} + l_{x1} j_{x3} k_{x4} + j_{x1} k_{x3} l_{x4} - j_{x1} l_{x3} k_{x4} + j_{x1} l_{x3} k_{x2} - l_{x2} k_{x1} j_{x4} - j_{x2} l_{x1} k_{x4} \\
 & + j_{x2} l_{x3} k_{x4} + k_{x3} l_{x2} j_{x4} - l_{x3} j_{x2} k_{x1} - k_{x1} j_{x3} l_{x4} - j_{x1} k_{x3} l_{x2} + k_{x1} j_{x3} l_{x2} - j_{x1} k_{x2} l_{x4} \\
 & + j_{x1} l_{x2} k_{x4} + l_{x3} k_{x1} j_{x4} + k_{x2} j_{x3} l_{x4}
 \end{aligned} \tag{6.126}$$

$x = ea, ec, ta$

K_{B1} und K_{B2} definieren sich analog zum vorhergehenden Kapitel (siehe Gl. (5.89) und (5.90)). Die Anfangsbedingungen definieren sich entweder im Laufe einer dynamischen Rechnung aus den Ergebnissen des vorhergehenden Rechenschrittes, oder können für den Beginn einer Rechnung aus dem stationären Zustand folgendermaßen hergeleitet, bzw. definiert werden: Die Anfangswerte im Falle eines stationären Systems lauten für $a_k < 0$:

$$\begin{aligned}
 \phi(\xi, 0) &= f_{ea0} (K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi}) + f_{ec0} (K_{x3} e^{e_c \xi} + K_{x4} e^{-e_c \xi}) \\
 f_{ea0} + f_{ec0} &= 1 \\
 j(\xi, 0) &= j_{ea0} (K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi}) + j_{ec0} (K_{x3} e^{e_c \xi} - K_{x4} e^{-e_c \xi}) \\
 j_{ea0} &= \frac{1}{420} \frac{140 e_a s_2 s_3 - 112 a_k e_a s_3 - 108 a_k e_a s_1 - e_a^3}{s_1 s_2 s_3} \\
 j_{ec0} &= \frac{1}{420} \frac{140 e_c s_2 s_3 - 112 a_k e_c s_3 - 108 a_k e_c s_1 - e_c^3}{s_1 s_2 s_3} \\
 k(\xi, 0) &= k_{ea0} (K_{x1} e^{e_a \xi} + K_{x2} e^{-e_a \xi}) + k_{ec0} (K_{x3} e^{e_c \xi} + K_{x4} e^{-e_c \xi}) \\
 k_{ea0} &= \frac{1}{140} \frac{-28 a_k s_3 - 27 a_k s_1 + s q - 35 s_2 s_3}{s_2 s_3}
 \end{aligned}$$

$$k_{ec0} = \frac{1}{140} \frac{-28a_k s_3 - 27a_k s_1 - sq - 35s_2 s_3}{s_2 s_3}$$

$$l(\xi, 0) = l_{ea0} (K_{x1} e^{e_a \xi} - K_{x2} e^{-e_a \xi}) + l_{ec0} (K_{x3} e^{e_c \xi} - K_{x4} e^{-e_c \xi})$$

$$l_{ea0} = \frac{1}{3920} \frac{-672a_k e_a s_3 - 648a_k e_a s_1 - 6e_a^3}{s_2 s_3^2}$$

$$l_{ec0} = \frac{1}{3920} \frac{-672a_k e_c s_3 - 648a_k e_c s_1 - 6e_c^3}{s_2 s_3^2}$$

unter Verwendung von sq nach Gleichung (6.35). Die Anfangswerte für die Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen c_m können vom vorhergehenden Kapitel übernommen werden. Die Anfangswerte zur Berechnung der Konstanten für die Lösungen für $a_k > 0$ definieren sich analog.

Die Konstantenpaare K_{x1} , K_{x2} und K_{x3} , K_{x4} für die Funktionen der räumlichen Verteilung können mit Hilfe der Randbedingungen bestimmt werden.

6.2 Testrechnungen

Die ersten Testrechnungen für die Näherungslösung der P_3 Neutronentransportgleichung für eine homogene Zelle mit zwei Gruppen verzögerter Neutronen werden für das bereits für die punktkinetischen Gleichungen eingeführte, willkürlich festgelegte Testsystem durchgeführt. Die Systemkonstanten sind aus Abschnitt 3.2 und 4.2 übernommen, zusätzlich werden noch dimensionslose Konstante für den Neutronentransport 2. Ordnungs₂ = 100
dimensionslose Konstante für den Neutronentransport 3. Ordnungs₃ = 120
definiert.

Die Konstanten für die für den räumlichen Verlauf der prompten Neutronenflussverteilung K_{x1} und K_{x2} und der verzögerten Neutronenflussverteilung K_{d1} und K_{d2} sind ebenfalls aus dem Abschnitt 4.2 entnommen. Auch die grundsätzlichen Überlegungen zur Wahl der Konstanten und die Interpretation des dadurch abgebildeten Systems sind bereits in Abschnitt 4.2 beschrieben. Zur besseren Vergleichbarkeit der Ergebnisse für die P_3 Lösung mit der Diffusionslösung werden die zusätzlichen räumlichen Konstanten K_{x3} und K_{x4} gleich 0 gesetzt.

Die Ergebnisse der Testrechnungen für Näherungslösung der P_3 Neutronentransportgleichung mit zwei Gruppen verzögerter Neutronen sind in den folgenden Abbildungen dargestellt. Abb. 6-1 zeigt die Entwicklung des Neutronenflusses ϕ in Raum und Zeit für zwei verschiedene Kritikalitätszustände bei einer vorgegebenen Störung von 0.3 \$. Abb. 6-2 zeigt die Entwicklung des Neutronenstromes j , Abb. 6-3 die Entwicklung des Neutronenflusses höherer Ordnung k , Abb. 6-4 die Entwicklung des Neutronenflusses höherer Ordnung l . Abb. 6-5 zeigt die Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der ersten und Abb. 6-6 der zweiten Gruppe verzögerter Neutronen.

Die räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenflusses in der P_3 Näherung der Transportgleichung ist dem Ergebnis der Diffusionsgleichung und der P_1 Näherung sehr ähnlich. Die exakten Unterschiede zwischen der Näherungslösung für die P_3 und die Diffusionsgleichung werden Abb. 6-7, Abb. 6-8, Abb. 6-9 und Abb. 6-10 dargestellt und diskutiert.

Das räumliche und zeitliche Verhalten des Neutronenflusses in Abb. 6-1 zeigt das bereits aus der Lösung der punktkinetischen Gleichungen und der Diffusionsgleichung mit verzögerten Neutronen bekannte zeitliche Verhalten. Das räumliche Verhalten ist vom Kritikalitätszustand abhängig und wird entweder durch eine exponentielle oder eine trigonometrische (Kosinusverteilung) Verteilung, die bereits aus den statischen Lösungen der P_3 Gleichungen bekannt ist, dargestellt.

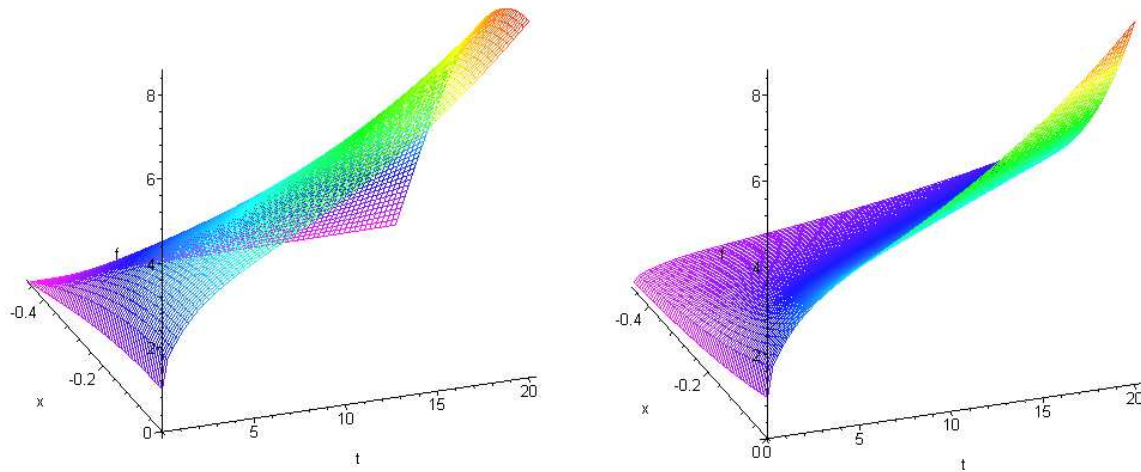


Abb. 6-1: Räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenflusses ϕ als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) für die Näherungslösung der P_3 Transportgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

Die räumliche Ableitung des Neutronenflusses ergibt den Neutronenstrom j , dargestellt in Abb. 6-2. Dieser ist für die Lösung der P_3 und der P_1 Neutronentransportgleichung nahezu identisch, diese Tendenz zeichnet sich auch in der Entwicklung ab. Die bestehenden Differenzen zwischen der Lösung für die P_3 Gleichung und der Diffusionsgleichung sind in dieser Darstellung ebenfalls nicht auszumachen. Aus der Entwicklung der Gleichungen ist allerdings bereits klar ersichtlich, dass sich im Bereich des Prompt Jump ein Unterschied abzeichnen muss (vgl (4.81) und (4.82) mit (6.110) und (6.111)). Dieser Unterschied wird aber erst später im direkten Vergleich zwischen der P_3 und der Diffusionslösung deutlich.

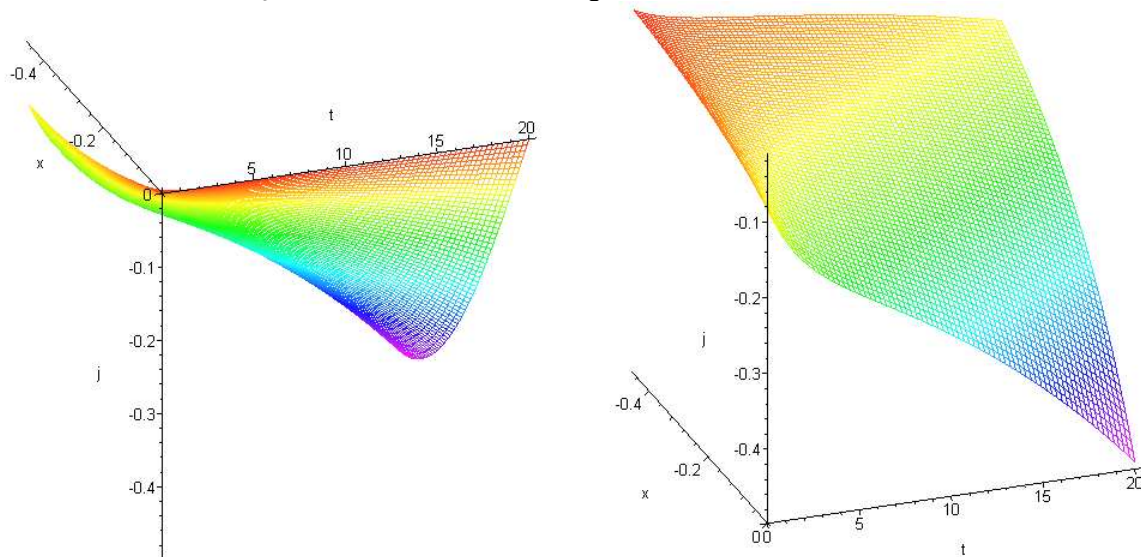


Abb. 6-2: Räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenstromes j (Neutronenfluss 1. Ordnung) als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) für die Näherungslösung der P_3 Transportgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

Die räumliche Ableitung des Neutronenstromes ergibt den Neutronenfluss 2. Ordnung k in Abb. 6-3. Der Absolutwert des Neutronenflusses 2. Ordnung k ist bereits mehr als 2 Größenordnungen kleiner als der Neutronenstrom.

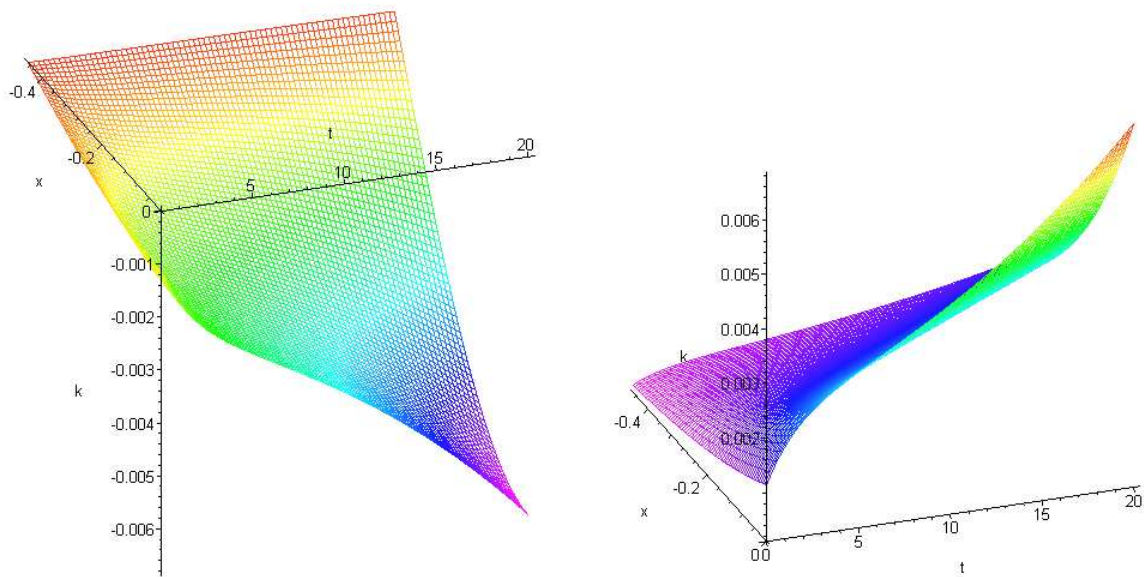


Abb. 6-3: Räumliche und zeitliche Entwicklung des höheren Neutronenflusses k (Neutronenfluss 2. Ordnung) als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) für die Näherungslösung der P_3 Transportgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

Die räumliche Ableitung des Neutronenflusses 2. Ordnung ergibt den Neutronenfluss 3. Ordnung I in Abb. 6-3. Der Absolutwert des Neutronenflusses 3. Ordnung I ist bereits annähernd 4 Größenordnungen kleiner als der Neutronenstrom.

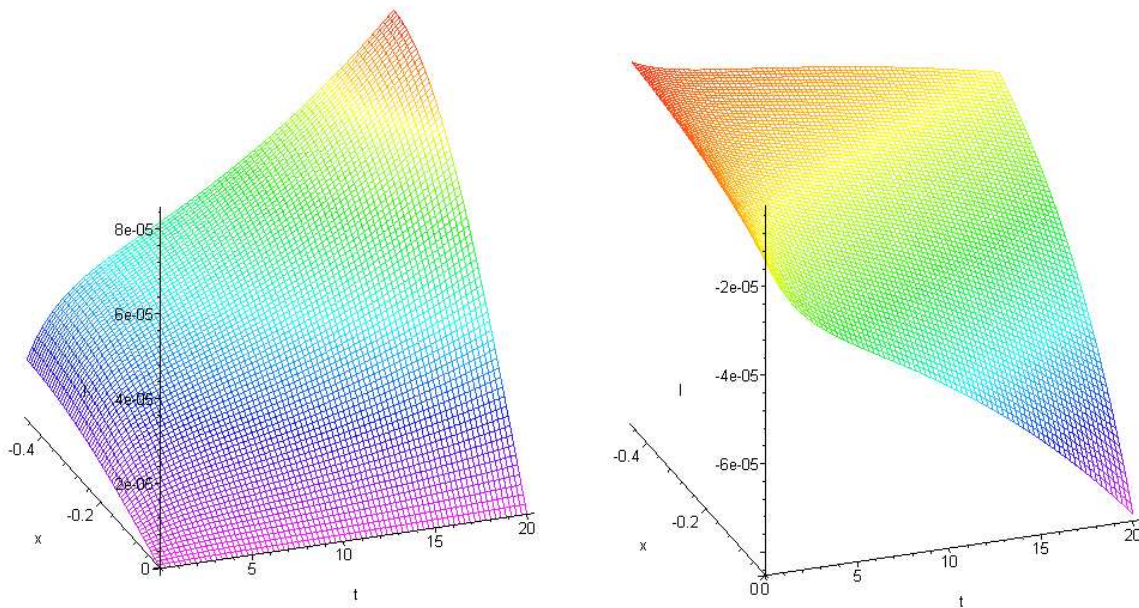


Abb. 6-4: Räumliche und zeitliche Entwicklung des höheren Neutronenflusses I (Neutronenfluss 3. Ordnung) als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) für die Näherungslösung der P_3 Transportgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

Die räumliche und zeitliche Veränderung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten (Abb. 6-5) und zweiten (Abb. 6-6) Gruppe sind in den folgenden beiden Abbildungen dargestellt. Die räumliche Verteilung der verzögerten Neutronen ist für die Anfangsbedingung eines statischen Reaktors identisch mit der räumlichen Verteilung des Neutronenflusses. Der zeitliche Verlauf entspricht weitgehend dem bereits aus der Lösung der punktkinetischen Gleichungen bekannten Verhalten.

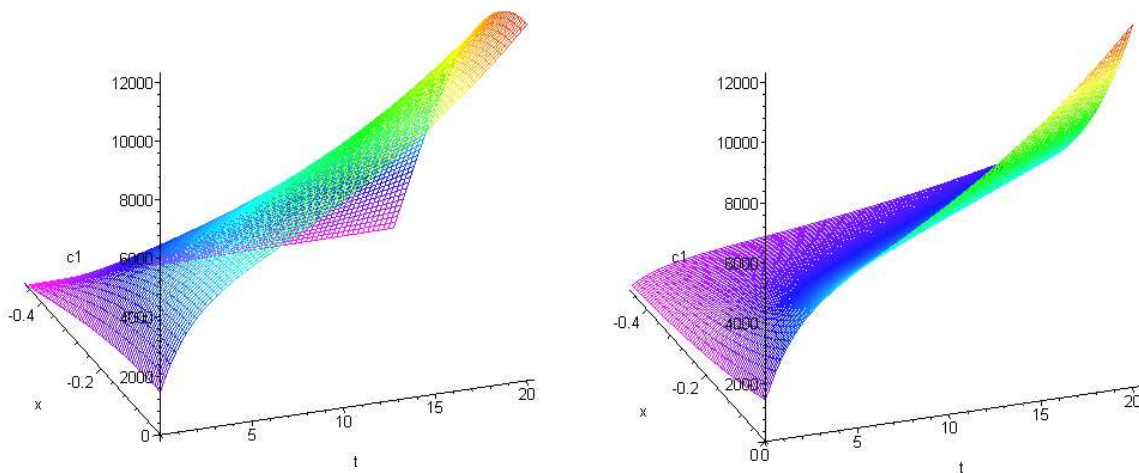


Abb. 6-5: Räumliche und zeitliche Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten Gruppe c_1 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) für die Näherungslösung der P_3 Transportgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

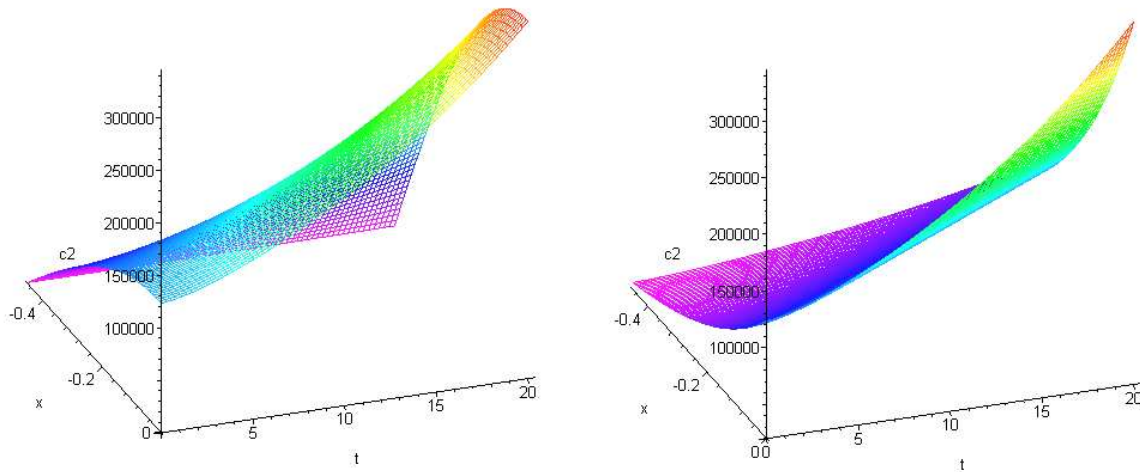


Abb. 6-6: Räumliche und zeitliche Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der zweiten Gruppe c_2 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) für die Näherungslösung der P_3 Transportgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

In Abb. 6-7 sind die Differenzen des Neutronenflusses ϕ zwischen der Näherungslösung der P_3 Gleichung und der Diffusionsgleichung dargestellt. Der positive bzw. negative Peak im Zeitbereich kleiner 0.001 s ist durch die veränderte Lösungsstruktur der P_3 Lösung, verglichen mit der Diffusionslösung zu erklären. In der Lösung der P_3 Gleichung tauchten zusätzliche Exponentialterme mit sehr stark negativem Exponenten auf, die dadurch sehr schnell abklingen. Diese zusätzlichen Exponentialterme stellen die zeitliche Veränderung des Neutronenstromes und der Neutronenflüsse höherer Ordnung dar. Zusätzlich wird die aus dem Startwert bestimmte Konstante des prompten Terms der Diffusionsgleichung in der P_3 Gleichung in vier Konstanten aufgeteilt. Diese Differenz ist qualitativ immer vorhanden, denn sie ist durch die unterschiedliche Lösungsstruktur begründet. Die Quantität der Differenz ist allerdings sehr stark von der Gesamtheit der Systemparameter abhängig. Die Höhe des Peaks ist beispielsweise von a_k abhängig und steigt mit steigendem Betrag von a_k an, während das zeitliche Verhalten der Differenz von den verschiedenen Zeitkonstanten (prompte Neutronenlebensdauer, Zerfallskonstanten der verzögerten Neutronen) des Systems abhängig ist. Das Verhalten für den längeren, durch das Verhalten verzögerten Neutronen bestimmten, Zeitbereich ist bis auf die Konstanten für beide Rechenverfahren annähernd identisch. Die geringen Unterschiede in den Konstanten bedingen den geringfügigen Unterschied, der auch nach längerer Zeit konstant erhalten bleibt. Die Konstanz ist durch die identische Näherung der Reihenentwicklung zur Bestimmung der Exponenten, die für das Verhalten des Neutronenflusses aufgrund der Produktion der verzögerten Neutronen verantwortlich sind erklärbar. Der bereits am Beginn der Transienten sichtbare Unterschied in der räumlichen Verteilung des Neutronenflusses ist durch die unterschiedlichen statischen Lösungen für den Neutronenfluss in der Diffusionsgleichung und in der P_3 Transportgleichung zu erklären. Das identische Ergebnis im Ursprung ($t = 0, x = 0$) liegt in der Normierung auf diesen Punkt begründet.

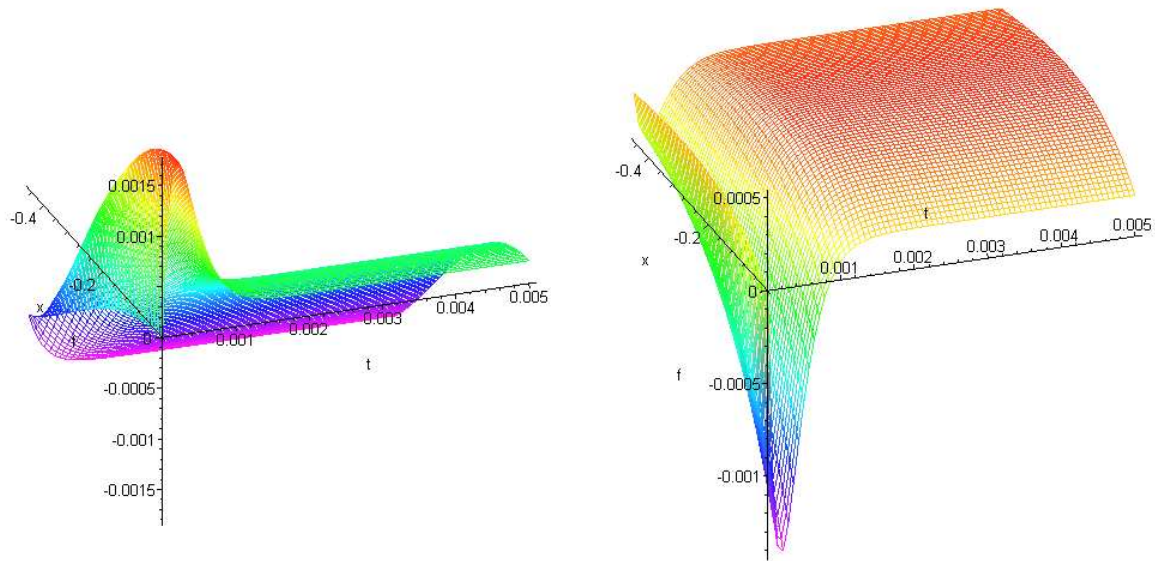


Abb. 6-7: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung des Neutronenflusses ϕ als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) zwischen den Näherungslösungen der P_3 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($f_{\text{trans}} - f_{\text{diff}}$)

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

Die Differenzen im Neutronenstrom zwischen Ergebnissen der Diffusions- und der P_3 Transportgleichung sind in Abb. 6-8 abgebildet. Die Differenzen im Neutronenstrom verhalten sich ähnlich den Differenzen im Neutronenfluss. Im sehr kurzen Zeitbereich < 0.01 s differiert das Zeitverhalten für die vorgegebenen Systemparameter, diese Differenz klingt aber schon nach kurzer Zeit fast vollkommen ab. Sie liegt im bereits angesprochenen Unterschied in der Reihenentwicklung. Während sich in der Entwicklung für die P_3 Gleichung die Terme für die Kurzzeitentwicklung im und unterhalb des Zeitrums des Prompt Jump in den Gleichungen für j , k und l wegkürzen, bleibt dieser Term in der Entwicklung des Neutronenstromes in der Diffusionsgleichung erhalten. Der Unterschied in der Lösung für die räumliche Verteilung des Neutronenstromes ist aufgrund des relativ deutlichen Unterschiedes im Zeitverhaltens nicht mehr direkt wahrnehmbar.

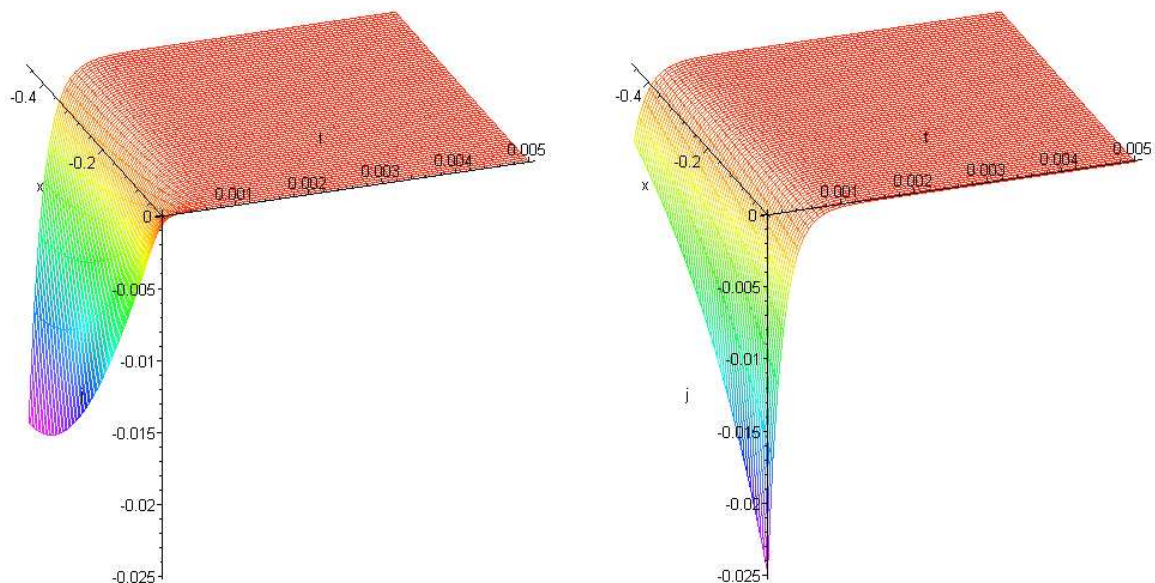


Abb. 6-8: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung des Neutronenstromes j als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) zwischen den Näherungslösungen der P_3 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($j_{\text{trans}} - j_{\text{diff}}$)

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$

- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

Die Differenzen zwischen den, durch die Diffusionsgleichung und die P_3 Transportgleichung berechneten Konzentrationen der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten (Abb. 6-9) und der zweiten (Abb. 6-10) Gruppe sind in den beiden folgenden Abbildungen dargestellt. Wie bereits in der Diskussion der Differenzen im Neutronenfluss festgestellt, sind die zeitlichen Exponentialfunktionen die für die längerfristige Entwicklung der verzögerten Neutronenproduktion, für die Diffusions- und die P_3 Transportgleichung durch eine identische Näherung der Reihenentwicklung bestimmt. Der zeitlich konstante Verlauf der Differenzen entspricht dieser Entwicklungsbedingung. Lediglich im Anfangsbereich der ersten Gruppe zeigen sich kleine Unterschiede, die auf die in der Lösung der P_3 Gleichung neu hinzugekommenen Exponentialfunktionen zurückzuführen sind. Die Differenzen am Beginn der Rechnungen für beide Konzentrationen der Vorläuferkerne zeigen einen Unterschied im stationären Zustand. Dieser Unterschied entsteht allerdings weniger durch die Art der Gleichung (Diffusion oder P_3), sondern vorwiegend durch die geringfügig unterschiedlichen Konstanten der Lösung, die durch Näherungsansätze aus den identischen Anfangswerten bestimmt werden. Der Unterschied in der räumlichen Verteilung der Vorläuferkerne ist, wie auch schon für den Neutronenfluss, auf den Verteilungsunterschied zwischen der Lösung der Diffusions- und der P_3 Gleichung zurückzuführen.

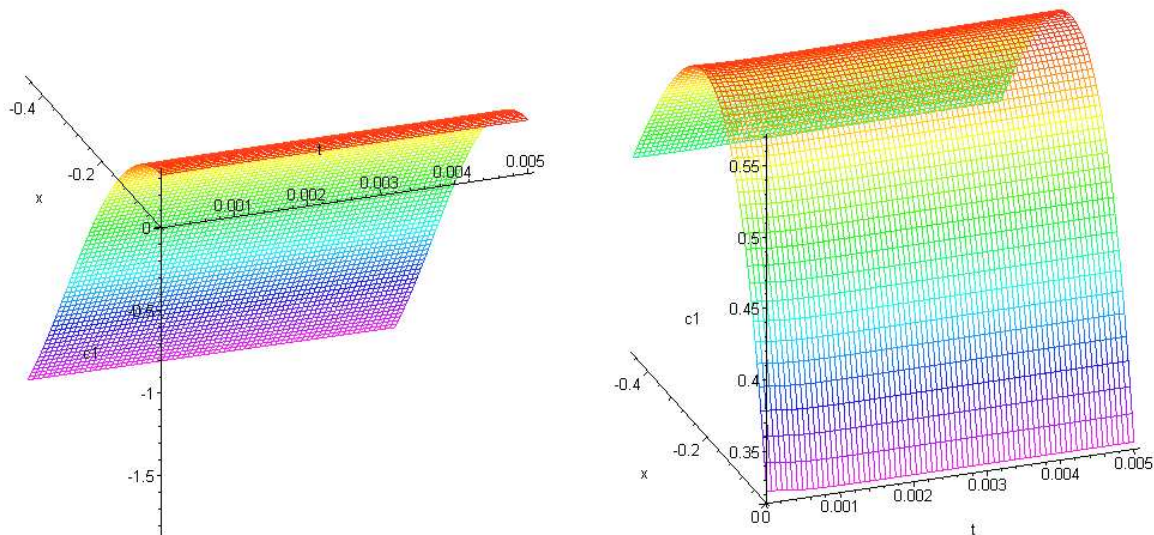


Abb. 6-9: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten Gruppe c_1 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) zwischen den Näherungslösungen der P_3 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($c_{1trans} - c_{1diff}$)

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

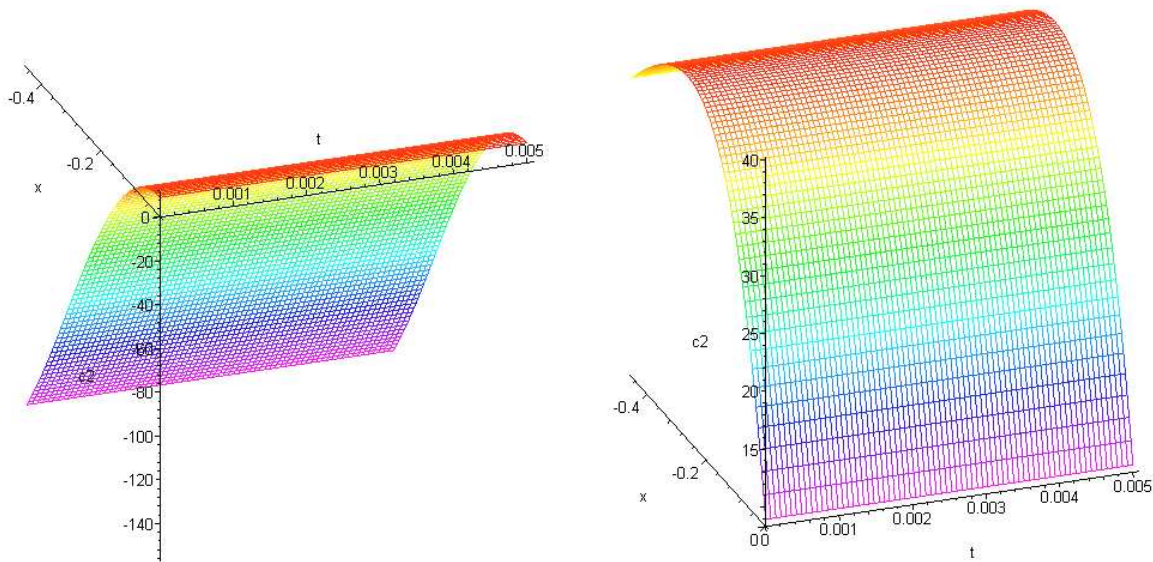


Abb. 6-10: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten Gruppe c_2 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 0.3 \$$) zwischen den Näherungslösungen der P_3 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($c_{2trans} - c_{2diff}$)

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

Die folgenden sechs Abbildungen zeigen den Neutronenfluss (Abb. 6-11), den Neutronenstrom (Abb. 6-12), die Neutronenflüsse 2. (Abb. 6-13) und 3. Ordnung (Abb. 6-14) und die Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten (Abb. 6-15) und der zweiten (Abb. 6-16) Gruppe für eine prompt kritische Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$). Besonders bemerkenswert sind hier die sehr schnellen Anstiege des Neutronenflusses

$\left(\frac{\phi_1}{\phi_0} \approx 80 \right)$, während der

Anstieg des Neutronenstrom wesentlich langsamer verläuft $\left(\frac{j_1}{j_0} \approx 3 \right)$. Das zeitliche Verhalten

der Neutronenflüsse höherer Ordnung bewegt sich in ähnlichen Bereichen. Die Konzentration der Vorläuferkerne der ersten Gruppe der verzögerten Neutronen wird in dem kurzen darge-

stellten Zeitraum nur relativ schwach beeinflusst $\left(\frac{c_{11}}{c_{10}} \approx 2 \right)$ und die Konzentration der Vorläu-

ferkerne der zweiten Gruppe der verzögerten Neutronen bleibt im dargestellten Zeitraum annähernd konstant. Die zweite Gruppe würde erst beeinflusst, wenn die Transiente über einen längeren Zeitraum betrachtet würde.

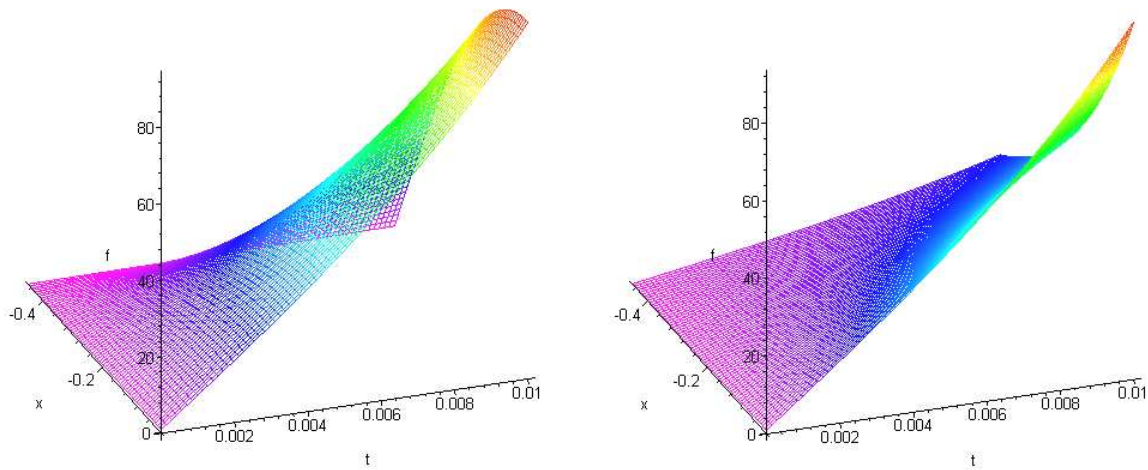


Abb. 6-11: Räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenflusses ϕ als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$) für die Näherungslösung der P_3 Transportgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

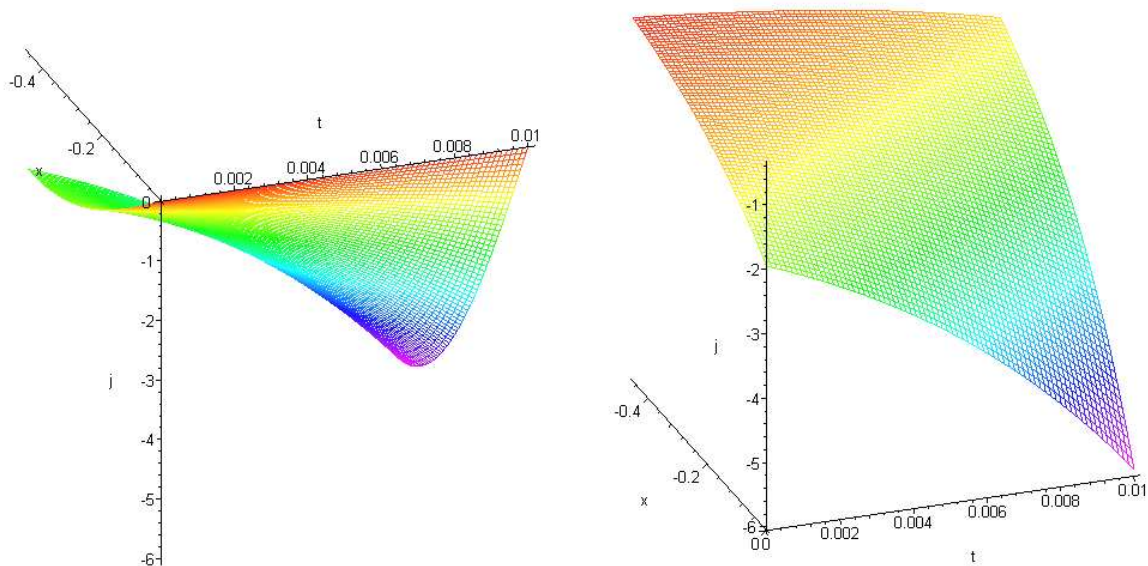


Abb. 6-12: Räumliche und zeitliche Entwicklung des Neutronenstrom j als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$) für die Näherungslösung der P_3 Transportgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

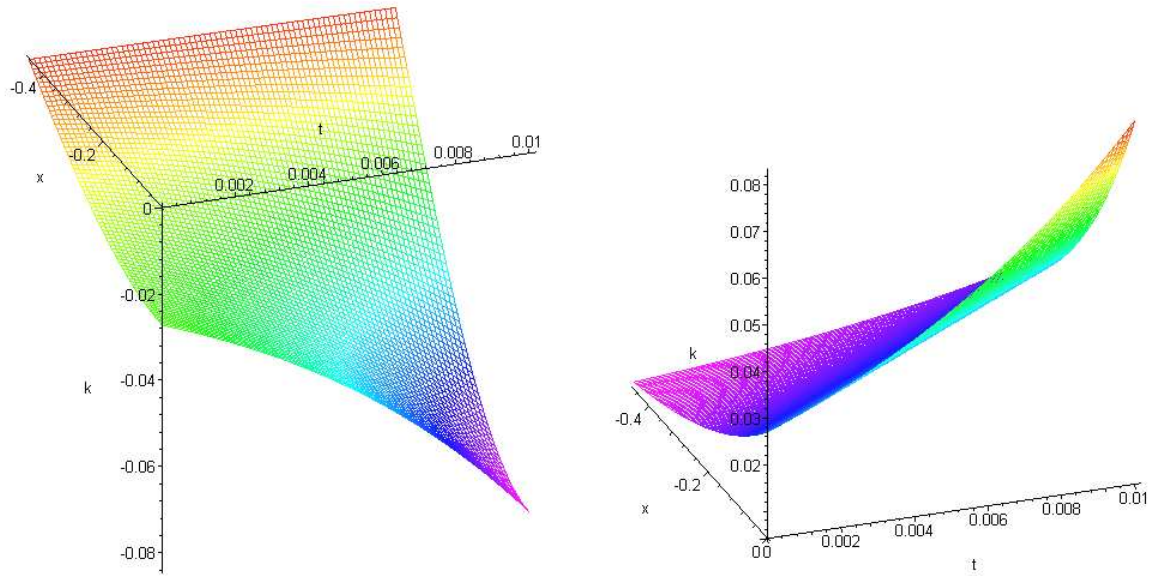


Abb. 6-13: Räumliche und zeitliche Entwicklung des höheren Neutronenflusses k (Neutronenfluss 2. Ordnung) als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1$ \$) für die Näherungslösung der P_3 Transportgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

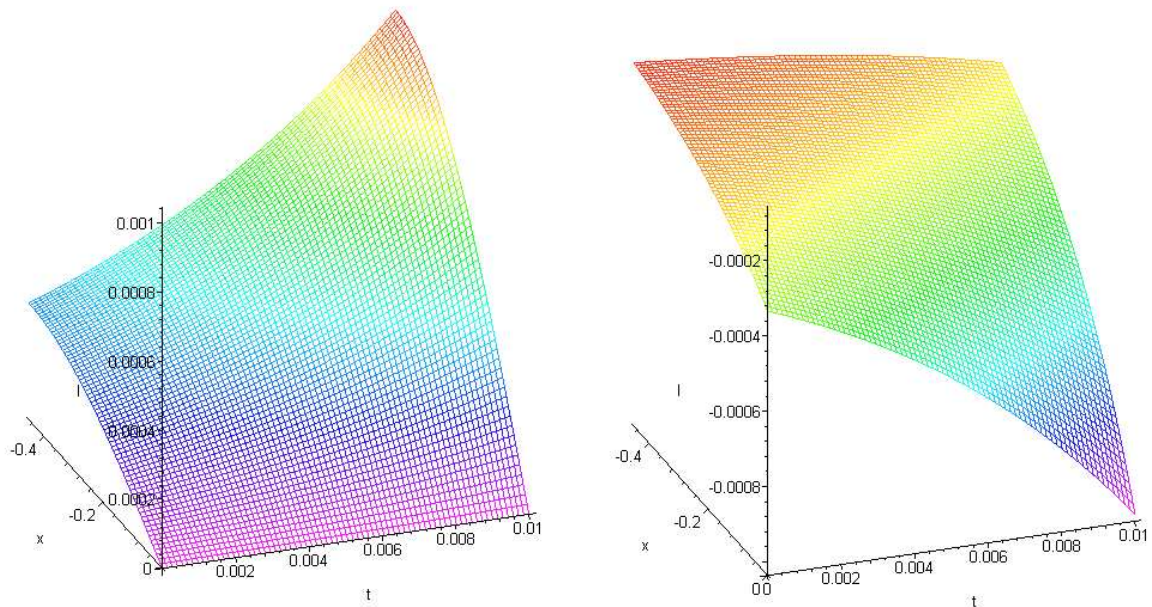


Abb. 6-14: Räumliche und zeitliche Entwicklung des höheren Neutronenflusses l (Neutronenfluss 2. Ordnung) als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1$ \$) für die Näherungslösung der P_3 Transportgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

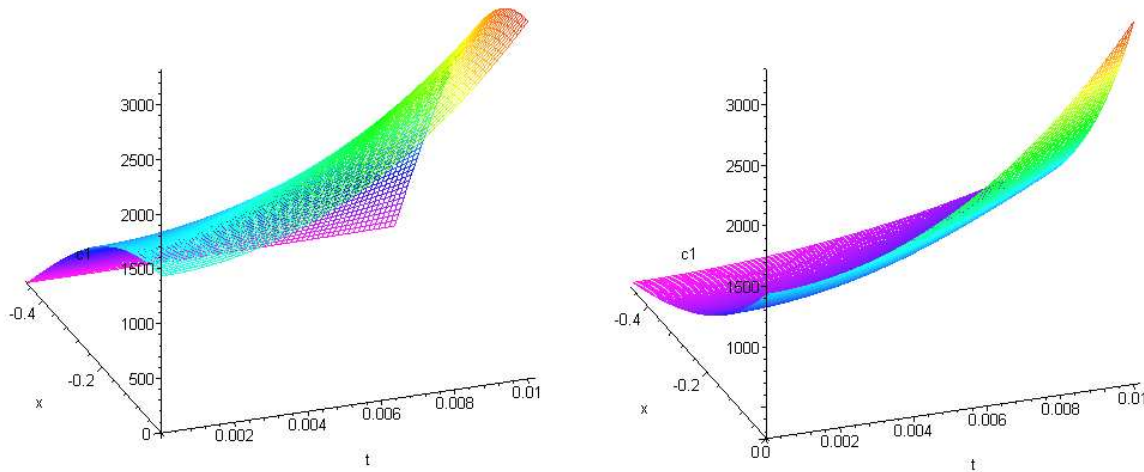


Abb. 6-15: Räumliche und zeitliche Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten Gruppe c_1 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$) für die Näherungslösung der P_3 Transportgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

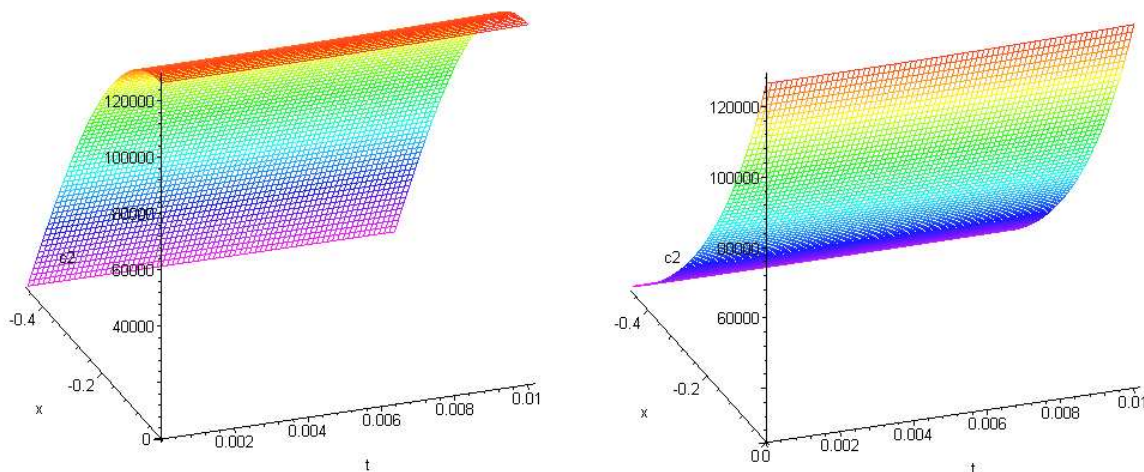


Abb. 6-16: Räumliche und zeitliche Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der zweiten Gruppe c_2 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$) für die Näherungslösung der P_3 Transportgleichung

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

Die folgenden vier Abbildungen zeigen die Differenzen zwischen der Diffusions- und der P_3 Lösung im Neutronenfluss (Abb. 6-17), im Neutronenstrom (Abb. 6-18) und in den Konzentrationen der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten (Abb. 6-19) und der zweiten (Abb. 6-20) Gruppe für eine prompt kritische Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$).

Die Struktur der Differenz im Neutronenfluss zwischen der Lösung der Diffusions- und der P_3 Transportgleichung für eine prompt kritische Störung (Abb. 6-17) unterscheidet sich deutlich von der bisher untersuchten schwächeren Störung (Abb. 6-7). In Falle einer prompt kritischen Störung, verlieren die verzögerten Neutronen die für kleine Störungen typische, das Reaktorverhalten dominierende Rolle. Die Neutronenpopulation vermehrt sich dann auch nicht mehr mit Zeitkonstanten die charakteristisch für die Entstehung der verzögerten Neutronen ist, sondern mit Zeitkonstanten im Bereich der Lebensdauer der prompten Neutronen. Auf die durch die Multiple Scale Expansion entwickelten Faktoren der Lösung hat diese Änderung folgende Auswirkung. Die für die Diffusions- und die P_3 Transportlösung annähernd identischen Exponenten für die Darstellung des Systemverhaltens aufgrund der Produktion verzögerter Neutronen ver-

lieren an Einfluss auf die Gesamtlösung, während die vier unterschiedlichen Exponenten in der Näherungslösung für die P_3 Gleichung, die für das Systemverhalten aufgrund der Produktion der prompten Neutronen stehen größeren Einfluss auf die Lösung gewinnen. Der in den Ergebnissen für schwächere Störungen abklingende Peak ist in den Ergebnissen für starke Störungen nicht mehr, oder nur noch sehr schwach vorhanden. Der Peak wird durch eine exponentiell wachsende Differenz überlagert. Das auf den ersten Blick überraschend gute Ergebnis für $a_k < 0$ ist durch die Konfiguration der Konstanten zu erklären, die Unterschiede heben sich in diesem Fall auf, diese Tendenz ist auch in den weiteren Abbildungen, besonders bei der Produktion der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen zu beobachten.

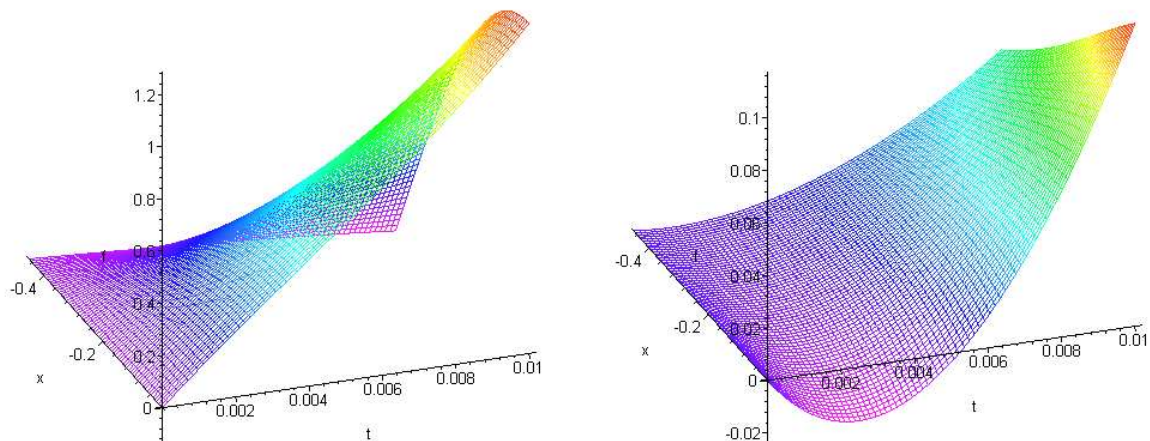


Abb. 6-17: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung des Neutronenflusses ϕ als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1$ \$) zwischen den Näherungslösungen der P_1 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($f_{\text{trans}} - f_{\text{diff}}$)

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

Das für die Differenz des Neutronenflusses diskutierte Verhalten kann ebenfalls für die Differenz im Neutronenstrom (Abb. 6-18) beobachtet werden, auch hier wird der Einfluss der prompten Neutronenproduktion deutlich. Die anfängliche Differenz, wie sie in der schwachen Störung zu beobachten war (Abb. 6-8), ist deutlich ausgeprägter und klingt auch über den gesamten, beobachtete Zeitraum nur langsam ab.

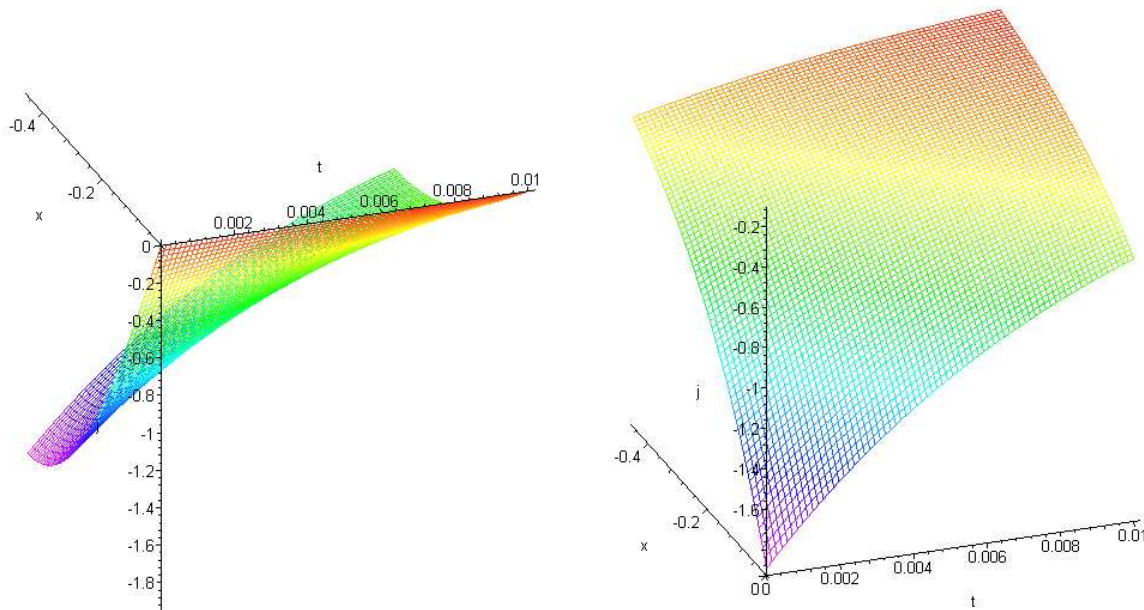


Abb. 6-18: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung des Neutronenstromes j als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$) zwischen den Näherungslösungen der P_3 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($j_{\text{trans}} - j_{\text{diff}}$)

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

Die Differenzen zwischen den durch die Diffusionsgleichung und die P_3 Transportgleichung berechneten Konzentrationen der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten (Abb. 6-19) und der zweiten (Abb. 6-20) Gruppe sind in den beiden folgenden Abbildungen dargestellt.

Wie bereits in der Diskussion der Differenzen im Neutronenfluss festgestellt, sind nur die zeitlichen Exponentialfunktionen die für die Beschreibung der verzögerten Neutronenpopulation für die Diffusions- und die P_3 Transportgleichung durch eine identische Reihenentwicklung bestimmt, die Exponenten für die Entwicklung der prompten Neutronenpopulation aber nicht. Die Differenzen am Beginn der Rechnungen für beide Konzentrationen der Vorläuferkerne zeigen einen Unterschied im stationären Zustand. Dieser Unterschied entsteht allerdings nicht durch die Art der Gleichung (Diffusion oder P_3), sondern vorwiegend durch die geringfügig unterschiedlichen Konstanten der Lösung, die durch Näherungsansätze aus den identischen Anfangswerten bestimmt werden. Der deutlich unterschiedliche zeitliche Verlauf der Konzentrationen der Vorläuferkerne kann durch einen Blick auf die Differenzen im Neutronenfluss erklärt werden (siehe Abb. 6-17). Die Differenzen im Fall $a_k < 0$ sind im kurzen Zeitbereich wesentlich geringen als im Fall $a_k > 0$. Im Fall $a_k < 0$ hebt sich der Einfluss der verschiedenen Faktoren der Lösung auf, während er sich im Fall $a_k > 0$ addiert. Dieser Unterschied würde sich aber sobald die betrachteten Zeiträume länger werden nahezu aufheben.

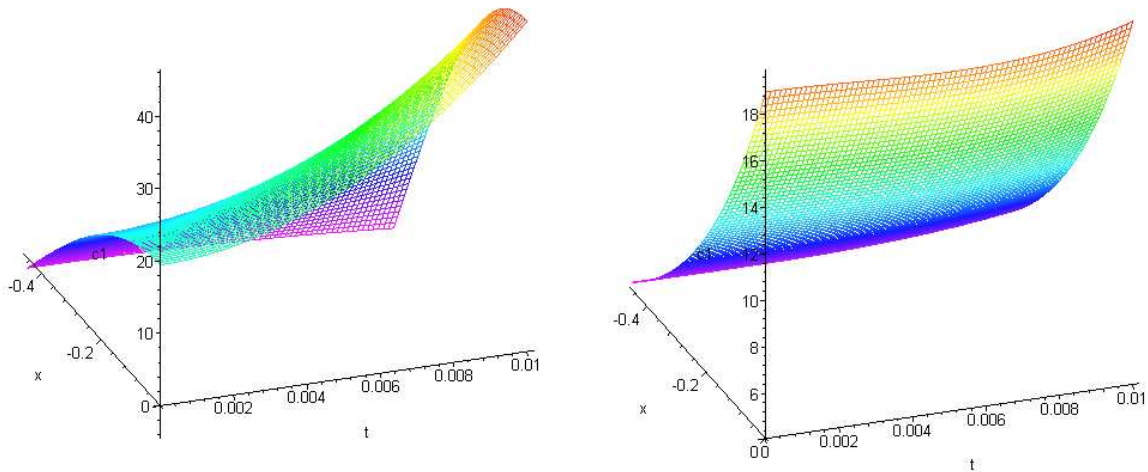


Abb. 6-19: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der ersten Gruppe c_1 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$) zwischen den Näherungslösungen der P_3 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($c_{1trans} - c_{1diff}$)

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- Rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

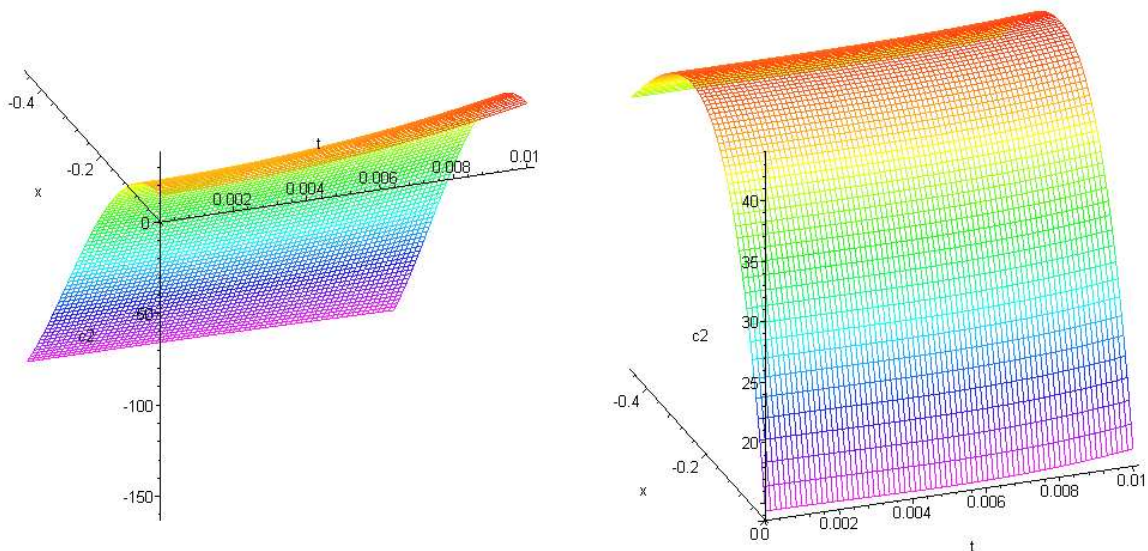


Abb. 6-20: Differenz der räumlichen und zeitlichen Entwicklung der Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen der zweiten Gruppe c_2 als Folge einer positiven Reaktivitätsstörung ($\rho = 1 \$$) zwischen den Näherungslösungen der P_1 Transportgleichung und der Diffusionsgleichung ($c_{2trans} - c_{2diff}$)

- Links: Lösung für ein kritisches System $a_k = 0.2$
- rechts: Lösung für ein unterkritisches System $a_k = -0.2$

6.3 Zusammenfassung

Die P_3 Neutronentransportgleichung für eine homogene Zelle mit zwei Gruppen verzögerter Neutronen kann durch Multiple Scale Expansion in eine Reihe analytischer Näherungsfunktionen, für das analytisch nicht mehr exakt lösbare System, entwickelt werden. Bei der Entwicklung der P_3 Gleichung treten im Vergleich zu der Diffusionsgleichung drei zusätzliche, kurzlebige Terme auf, die die Zeitableitung der Neutronenflüsse höherer Ordnung abbilden, während das Zeitverhalten der P_3 und der Diffusionsgleichung im Zeitbereich der Produktion der verzögerten Neutronen in der Entwicklung annähernd identisch ist. Der Vergleich des Raumzeitver-

haltens der P_3 und der Diffusionsgleichung zeigt deshalb für kleine Störungen ein sehr ähnliches Langzeitverhalten, im Kurzzeitverhalten sind durch die zusätzlichen Terme geringfügige Unterschiede sichtbar. Diese Unterschiede sind, aufgrund der in der Entwicklung entstehenden zusätzlichen Terme, qualitativ immer vorhanden. Quantitativ hängen diese Unterschiede jedoch sehr stark von den Systemparametern ab. Für prompt kritische Störungen sind beispielsweise anhaltende Unterschiede sichtbar, denn in diesem Fall beeinflussen die unterschiedlichen Terme im Zeitbereich der prompten Neutronenproduktion das Ergebnis. Insbesondere die angesprochene unterschiedliche Lösungsstruktur des Neutronenstroms wird bereits in den Herleitungen der Lösungen sichtbar.

7 ANWENDUNG INNERHALB EINES NODALEN VERFAHRENS

Die bisherigen Abschnitte 3 bis 6 beschreiben die theoretischen Entwicklungen, jeweils mit Herleitung und Testrechnungen für die Multiple Scale Expansion verschiedener Gleichungen der raum- und zeitabhängigen Neutronenphysik. Alle Testrechnungen beruhen auf dem Vergleich mit exakten analytischen Lösungen für eine Gruppe verzögerter Neutronen aus MAPLE[®], wie sie bereits im Abschnitt 3.1.1 entwickelt sind.

Im folgenden Abschnitt sollen einige der entwickelten Expansionslösungen mit den Ergebnissen eines, in der raum-zeitabhängigen Neutronenphysik gängigen, nodalen Rechencodes (PARCS) verglichen werden. Dieser Vergleich soll die Möglichkeiten und Grenzen der entwickelten analytischen Lösungen bezüglich einer direkten Einbindung der analytischen Lösungen in einen nodalen Rechencode beleuchten. Ein direkter Einsatz im Rahmen eines nodalen Rechencodes würde alle Einschränkungen bezüglich einer limitierten Zeitschrittweite aufheben. Allerdings gilt es hierbei zu beachten, dass eine räumliche Ausbreitung der Störung in benachbarte Nodes während eines Zeitschrittes vernachlässigt werden muss. Dieser Bereich der Entwicklung ist im Rahmen dieser Arbeit nicht vorgesehen, sondern wird nur als weiterer Schritt zur Entwicklung eines neuen Rechenverfahrens im nachfolgenden Kapitel theoretisch beleuchtet. Eine zusätzliche Entwicklung der raum-zeitabhängigen Ausbreitung einer Störung in einem System mit mehreren gestörten Zellen, wie es in einem nodalen Rechencode beschrieben werden kann, würde den Rahmen einer Doktorarbeit sprengen. Diese Entwicklung und deren Anwendung beinhaltet sicherlich ausreichend Stoff für eine weitere Dissertation.

Der angewandte Arbeitsbereich des PARCS Codes wird im folgenden Absatz kurz beschrieben.

Purdue Advanced Reactor Core Simulator

Die verwendete Version des PARCS Codes (PARCS-v2.3 Beta) löst die dreidimensionale stationäre und die instationäre Neutronendiffusionsgleichung mit verzögerten Neutronen. Die Diffusionsgleichung wird im kartesischen Koordinatensystem für zwei Energiegruppen gelöst. Die räumliche Verteilung des Neutronenflusses für die homogenisierten Knoten (Nodes) wird durch die Coarse Mesh Finite Difference Methode berechnet. Um die Diskretisierungsfehler zu reduzieren, kann die Koppelung zwischen benachbarten Knoten durch die Analytic Nodal Methode verbessert werden. Der zeitliche Verlauf des Neutronenflusses wird durch die Theta Methode berechnet^[12].

7.1 Testrechnungen

Für die rein kinetischen Testrechnungen wurde ein null- und ein eindimensionales System erstellt. Das Testsystem beruht auf den Wirkungsquerschnitten aus einem, mit PARCS ausgegebenen, Testdatensatz für einen Leichtwasserreaktor russischen Typs (WWER). Der Datensatz wurde auf eine Energiegruppe und eine Gruppe verzögerter Neutronen reduziert. Die Dimension wurde mit Hilfe der Eingabe der Randbedingungen (reflektierend) reduziert. Die Wirkungsquerschnitte wurden geringfügig geändert, um $k_{\text{eff}} \approx 1$ zu erreichen. Folgende Daten wurden verwendet:

ungestörtes System:

$$\begin{aligned}\Sigma_{\text{trans}} &= 0.3612 \text{ 1/cm} \\ \Sigma_a &= 2.088 \text{ e-02 1/cm} \\ v\Sigma_f &= 2.094494 \text{ e-02 1/cm} \\ v &= 2.3277 \text{ e+05 cm/s} \\ \lambda &= 0.3 \text{ 1/s} \\ \beta &= 0.0075\end{aligned}$$

gestörte Systeme:

$$\begin{aligned} v\bar{\Sigma}_f &= 2.0999 \text{ e-02 1/cm} \\ v\bar{\Sigma}_f &= 2.089088 \text{ e-02 1/cm} \end{aligned}$$

für die Expansionslösungen ergeben sich daraus folgende Konstanten:

$$\begin{aligned} \rho &= 0.002581 \\ \rho &= -0.002581 \\ \Lambda &= 2.0511 \text{ e-04 s} \\ s_1 &= 17.257 \end{aligned}$$

Die betrachteten Störungen wurden als Sprungstörung in das System eingeführt. Dies wird im Code durch eine stationäre Rechnung für das ungestörte System zur Erstellung eines Restart Files und durch einen anschließenden Restart mit den Daten für das gestörte System umgesetzt. Diese Art der Störung liegt eigentlich allen Störfallrechnungen zugrunde, denn alle Rückwirkungen die sich, durch die Änderung von thermo-hydraulischen Systemparametern, ergeben erscheinen bei der Übergabe in den neutronenphysikalischen Programmteil als Sprung, der durch die geänderten Wirkungsquerschnitte entsteht.

In PARCS wird der raum-zeitabhängige Neutronenfluss durch ein vollnumerisches Verfahren bestimmt, d. h. sowohl der Raum als auch die Zeit werden diskretisiert und für jeden Zeitschritt wird eine komplett neue Neutronenflussverteilung bestimmt. Im Gegensatz dazu wird im Expansionsverfahren die Neutronenflussverteilung nur einmal, am Beginn der kinetischen Rechnung bestimmt. Nachfolgend wird jede Zelle einzeln für sich als unabhängiges System betrachtet, deren Zeitentwicklung durch die mit Hilfe der Multiple Scale Expansion gewonnenen Näherungsfunktionen berechnet werden kann. Ein ähnliches Vorgehen wurde von Avery bereits im Jahre 1958 in „Theory of Coupled Reactors“^[38] beschrieben. Im punktkinetischen Verfahren wird ebenfalls nur am Beginn der kinetischen Rechnung einmal die Neutronenflussverteilung bestimmt, anschließend wird die Störung über das gesamte System verschmiert und die Neutronenflussänderung aus der Multiplikation der anfangs bestimmten Neutronenflussverteilung mit der sogenannten Amplitude bestimmt.

Abb. 7-1 zeigt die einer positiven Störung folgende rein kinetische Leistungsentwicklung. Die mit PARCS berechnete Systemleistung für eine globale Störung und die durch die Expansionslösung ermittelte Leistung sind in sehr guter Übereinstimmung. Diese Übereinstimmung entspricht den Erwartungen, denn die globale Störung in einem System mit reflektierenden Randbedingungen bedeutet nichts weiter als die, in den punktkinetischen Gleichungen angenommenen Voraussetzungen eines nulldimensionalen Systems.

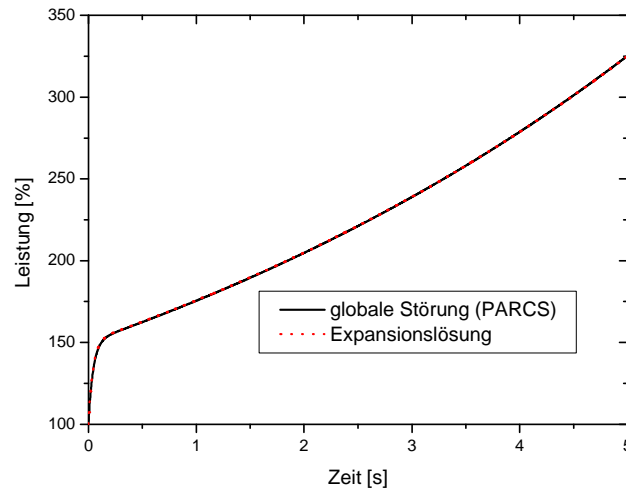


Abb. 7-1: Vergleich zwischen der mit PARCS und der durch die Expansionslösung bestimmten Leistungsentwicklung für eine positive, globale Störung und reflektierende Randbedingungen

Die normierte, mit PARCS berechnete, räumliche Verteilung des Neutronenflusses ist in Abb. 7-2 dargestellt. Der, sich über den ganzen Bereich einstellende konstante Neutronenfluss ist durch die Vorgabe der Randbedingungen bestimmt. Die allseitig reflektierenden Randbedingungen stellen ein in alle Richtungen unendlich ausgedehntes System her. Der zeitliche Verlauf des Neutronenflusses in diesem Diagramm ist in Form der verschiedenfarbigen Linien ablesbar. Der Neutronenfluss steigt während der gesamten Zeit, für die die rein kinetische Neutronenflussentwicklung berechnet wurde, an. Dieser Verlauf kann auch problemlos durch die Multiple Scale Expansion nachgebildet werden. Die Berechnung der Neutronenflussentwicklung, unabhängig für jede einzelne Zelle führt hier zu einem guten Ergebnis, denn die Austauschterme zwischen den einzelnen Zellen neutralisieren sich aufgrund der identischen Störung. Das gleiche gilt für die Lösung durch die Punktkinetik, denn hier wird lediglich die anfängliche Neutronenflussverteilung mit der ansteigenden Amplitudenfunktion multipliziert.

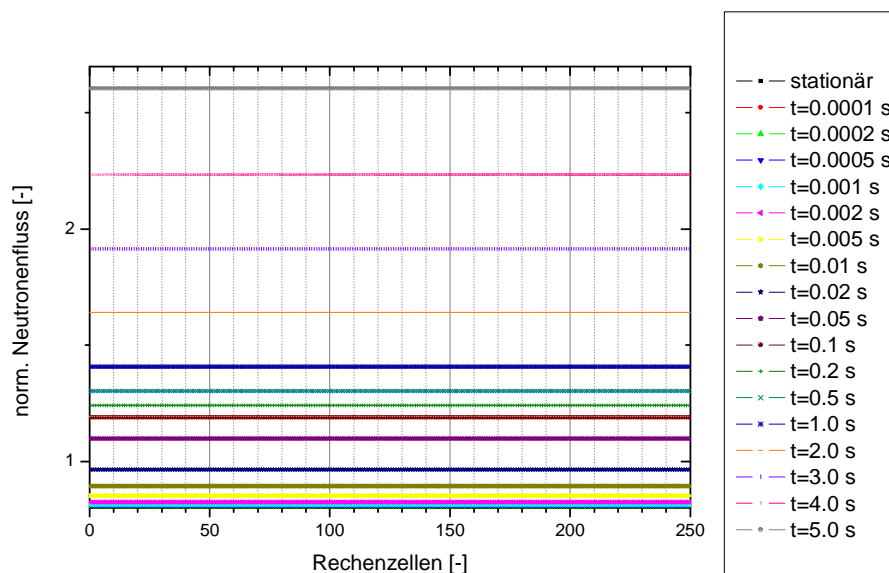


Abb. 7-2: Zeitliche Veränderung der normierten Verteilung des Neutronenflusses nach einer positiven, globalen Störung, berechnet unter der Voraussetzung reflektierender Randbedingungen

Die Veränderung der integralen Neutronenpopulation in Abb. 7-3 gibt genaue Auskunft über die Änderung der Leistung im Gesamtsystem. Auch hier ist deutlich zu sehen, dass die Expansion-

slösung in guter Übereinstimmung mit der Lösung, die mit PARCS erzielt wurde, ist. In diesem Fall sind auch die Ergebnisse für die punktkinetische Lösung und für die Expansionslösung identisch. In beiden Verfahren wird das Zeitverhalten nach identischen Formeln bestimmt und nachdem das gesamte System gleichmäßig gestört ist, spielt in beiden Verfahren der Austausch von Neutronen zwischen den einzelnen Zellen keine Rolle. Lediglich der Rechenaufwand in der punktkinetischen Lösung ist etwas geringer, da hier zuerst integriert und danach die Differentialgleichung berechnet wird, während im Expansionsverfahren zuerst die Differentialgleichung für jede Zelle gelöst wird und die Ergebnisse erst nachfolgend integriert werden.

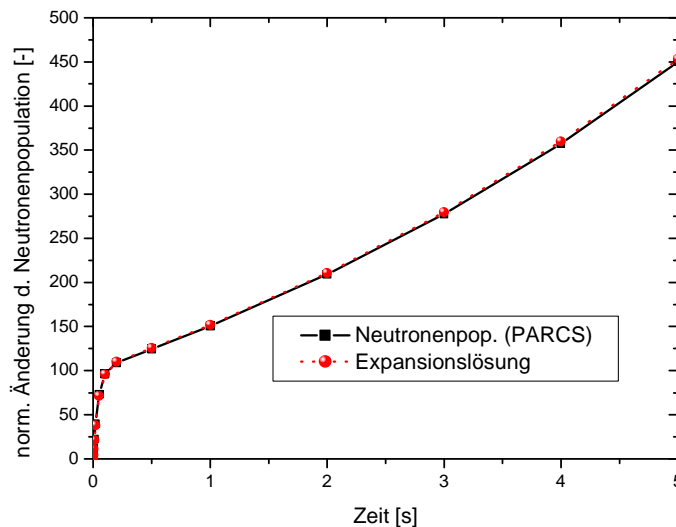


Abb. 7-3: Vergleich der durch PARCS und durch die Multiple Scale Expansion berechneten normierten Änderung der Neutronenpopulation für eine positive, globale Störung mit reflektierenden Randbedingungen

Im Falle einer lokal begrenzten Störung sind die Ergebnisse die mit der Multiple Scale Expansionslösung erzielt werden können erwartungsgemäß nicht so gut wie für den Fall einer globalen Störung. Dieses Ergebnis entspricht den Erwartungen, denn im bisherigen Modell ist die raum-zeitabhängige Ausbreitung einer Störung noch nicht berücksichtigt. Der zeitliche, rein kinetische Leistungsverlauf für eine lokale Störung ist in Abb. 7-4 dargestellt. Der mit der Expansionslösung berechnete Leistungsverlauf weicht deutlich vom mit PARCS berechneten ab. Als zusätzliche Vergleichsmöglichkeit ist in dieser Abbildung die mit dem oft angewendeten punktkinetischen Verfahren berechnete Leistungsentwicklung abgebildet. Während mit der Expansionslösung das Ergebnis absolut um etwa 0.5% überschätzt wird, weicht das Ergebnis für die Lösung mit dem punktkinetischen Verfahren etwa 0.25% nach unten ab. Die absoluten Zahlen täuschen aber über die reale Qualität der Ergebnisse hinweg, eine relative Betrachtung der Qualität der Ergebnisse zeigt das Problem einer kleinen Änderung. Der relative Fehler für die Überschätzung durch die Expansionslösung beträgt etwa 30% und für das punktkinetische Verfahren etwa 15%.

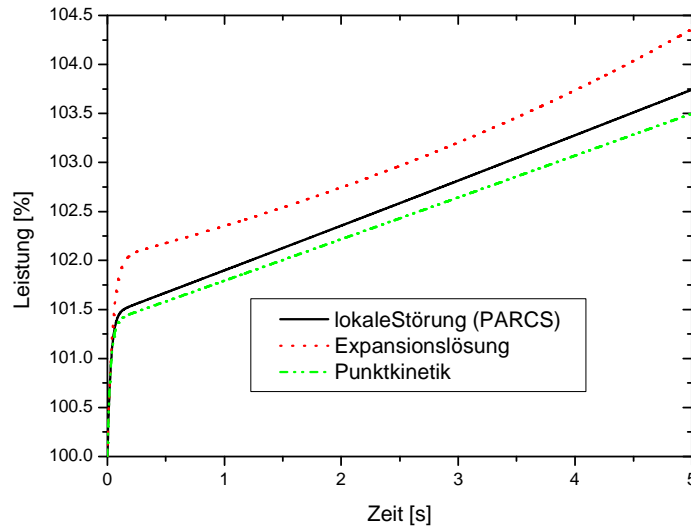


Abb. 7-4: Vergleich zwischen der mit PARCS, der durch die Expansionslösung und der durch die Punktkinetik bestimmten Leistungsentwicklung für eine positive, lokale Störung

Eine Erklärung für die Abweichungen, sowohl im punktkinetischen Verfahren als auch im Expansionsverfahren kann in Abb. 7-5 abgelesen werden. Die räumliche Verteilung des Neutronenflusses ist im Fall der lokalisierten Störung keineswegs mehr konstant wie im Falle der globalen Störung (siehe Abb. 7-2). Die lokale Störung (im Bereich 120-130) breitet sich in kurzer Zeit über das gesamte System aus und beeinflusst damit nicht nur den Neutronenfluss im gestörten Bereich, sondern auch in allen anderen Bereichen. Im Fall einer lokalen Störung spielt also die räumliche Ausbreitung der Störung eine nicht zu vernachlässigende Rolle für den Zeitablauf. Diese räumliche Ausbreitung wird aber in den beiden Näherungsverfahren – Punktkinetik und Expansionslösung – unterschiedlich behandelt.

In der punktkinetischen Näherungslösung wird die Störung über das gesamte System verschmiert, wobei zur Verbesserung der Qualität der Näherung zumeist noch eine Wichtungsfunktion eingeführt wird. Diese Funktion liefert eine zusätzliche Information über den Einfluss des Ortes des gestörten Bereichs auf das Zeitverhalten des Systems. Als Wichtungsfunktion im Falle der hier verwendeten Lösung für eine Energiegruppe wird im Allgemeinen der Neutronenfluss verwendet. Nachdem die Störung hier in ein unendlich ausgedehntes System eingeführt wird, kann aber auf diese Wichtungsfunktion verzichtet werden. Die Unterbewertung des Ergebnisses ist durch die Verteilung der Störung über das ganze System bedingt. In der Näherung werden alle neuen Neutronen in einem leicht gestörten System geboren, in Realität gibt es aber einen Teil Neutronen die direkt im Bereich der Störung entstehen und sich im Bereich der höheren Multiplizität natürlich schneller vermehren.

In der Expansionslösung wird das Ergebnis, wie bereits beschrieben, überbewertet. Hier tritt der, zur punktkinetischen Näherung, gegenteilige Effekt auf. Nachdem im Expansionsverfahren die Änderung in jeder Zelle für sich betrachtet wird, sich also adiabatisch verhält, bleiben zu viele Neutronen im Bereich der durch die Störung erhöhten Multiplizität. In Realität bewegt sich ein großer Teil der aufgrund der Störung zusätzlich produzierten Neutronen in die ungestörten Bereiche des Systems und führt dort zu einer Erhöhung der Neutronenpopulation. Genau dieser Bereich der raum-zeitabhängigen Ausbreitung einer Störung ist aber in den bisherigen Modellen noch nicht berücksichtigt und kann deshalb natürlich auch noch nicht zuverlässig angenähert werden. Der Effekt der Ausbreitung der Störung ist in Abb. 7-5 deutlich zu sehen.

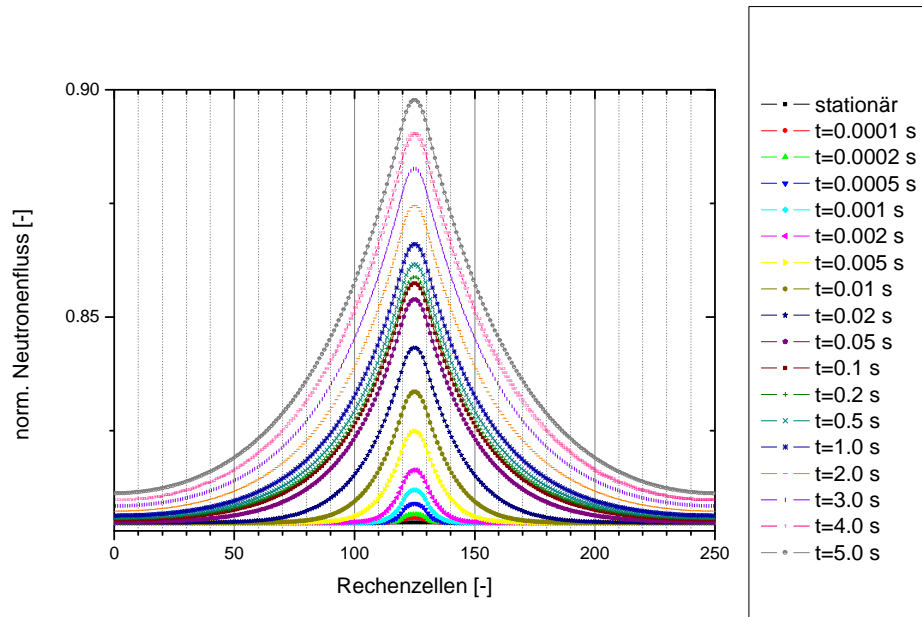


Abb. 7-5: Zeitliche Veränderung der normierten Verteilung des Neutronenflusses nach einer positiven, lokalen Störung, berechnet unter der Voraussetzung reflektierender Randbedingungen

Die Auswirkungen der Störung auf die integrale Neutronenpopulation ist in Abb. 7-6 dargestellt. Während in der punktkinetischen Näherung die integrale Änderung der Neutronenpopulation gegenüber der vollnumerischen Lösung nur sehr geringfügig unterschätzt wird, wird das Ergebnis in der Expansionslösung aufgrund der adiabaten Betrachtung jeder einzelnen Zelle relativ deutlich überschätzt. Diese Wertung gilt aber nur für genau dieses vorgegebene System. In einer allgemeineren Abschätzung kann festgestellt werden, dass die Ergebnisqualität der beiden Näherungsverfahren stark vom Ausbreitungsverhalten der Störung abhängig ist. Findet die Störung in einem stark gekoppelten System statt, breitet sich die Störung rasch durch das System aus, weil z. B.

- die Neutronenenergie hoch ist (z. B. schneller Reaktor),
- die freie Weglänge groß ist (z. B. gasgekühlter, schneller Reaktor)
- das System sehr klein ist (z. B. kompakter Reaktorkern),

dann ist das Ergebnis der punktkinetischen Näherung exakter, denn die räumliche Neutronenflussverteilung bleibt dann während der Transiente annähernd konstant. Verändert sich die räumliche Neutronenflussverteilung aber stark und langfristig im Laufe einer Transiente, weil das System nur schwach gekoppelt ist, wie es beispielsweise in einem großen Leichtwasserreaktorkern der Fall ist, dann wird die Expansionslösung bessere Ergebnisse als die punktkinetische Näherung liefern.

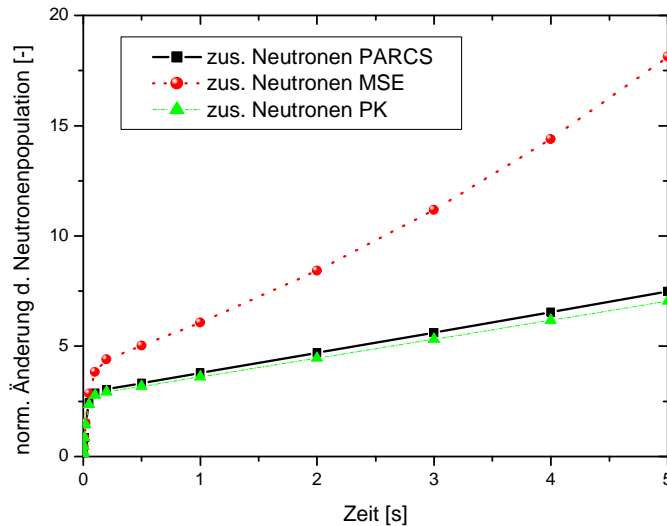


Abb. 7-6: Vergleich der durch PARCS und durch die Multiple Scale Expansion berechneten normierten Änderung der Neutronenpopulation für eine positive, lokale Störung mit reflektierenden Randbedingungen

Nach der Untersuchung und Analyse der positiven Störung folgt in den nächsten Abbildungen eine Untersuchung der Qualität der Näherungslösungen für eine negative Störung.

Abb. 7-7 zeigt die einer globalen, negativen Störung in einem nulldimensionalen System folgende rein kinetische Leistungsentwicklung. Die mit PARCS berechnete Systemleistung für eine globale Störung und die durch die Expansionslösung ermittelte Leistung sind in sehr guter Übereinstimmung. Diese Übereinstimmung entspricht den Erwartungen, denn die globale Störung mit reflektierenden Randbedingungen bedeutet nichts weiter als die in den punktkinetischen Gleichungen angenommenen Voraussetzungen eines nulldimensionalen Systems.

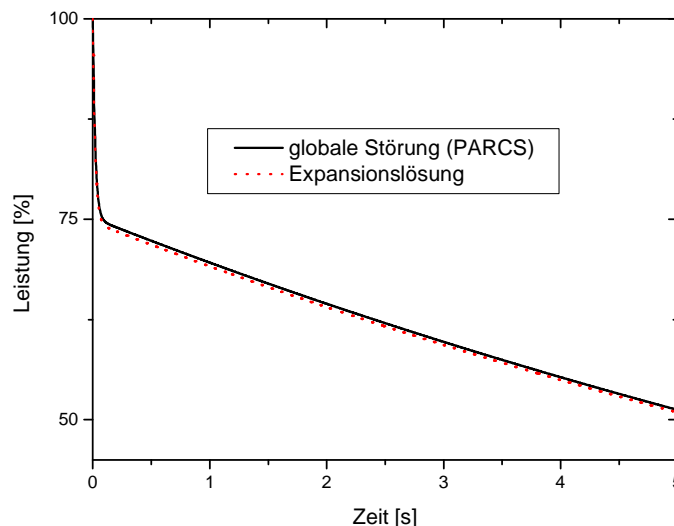


Abb. 7-7: Vergleich zwischen der mit PARCS und der durch die Expansionslösung bestimmten Leistungsentwicklung für eine negative, globale Störung und reflektierende Randbedingungen

Die normierte räumliche Verteilung des Neutronenflusses ist in Abb. 7-8 dargestellt. Der, sich über den ganzen Bereich einstellende, konstante Neutronenfluss ist wiederum (wie in Abb. 7-2) durch die Vorgabe der Randbedingungen bestimmt. Der Neutronenfluss fällt während der gesamten Zeit, für die die rein kinetische Neutronenflussentwicklung berechnet wurde, ab. Dieser Verlauf kann auch problemlos durch die Multiple Scale Expansion nachgebildet werden. Die Berechnung der Neutronenflussentwicklung, unabhängig für jede einzelne Zelle führt hier zu

einem guten Ergebnis, denn die Austauschterme zwischen den einzelnen Zellen neutralisieren sich, dies entspricht genau den Entwicklungsbedingungen des Modells.

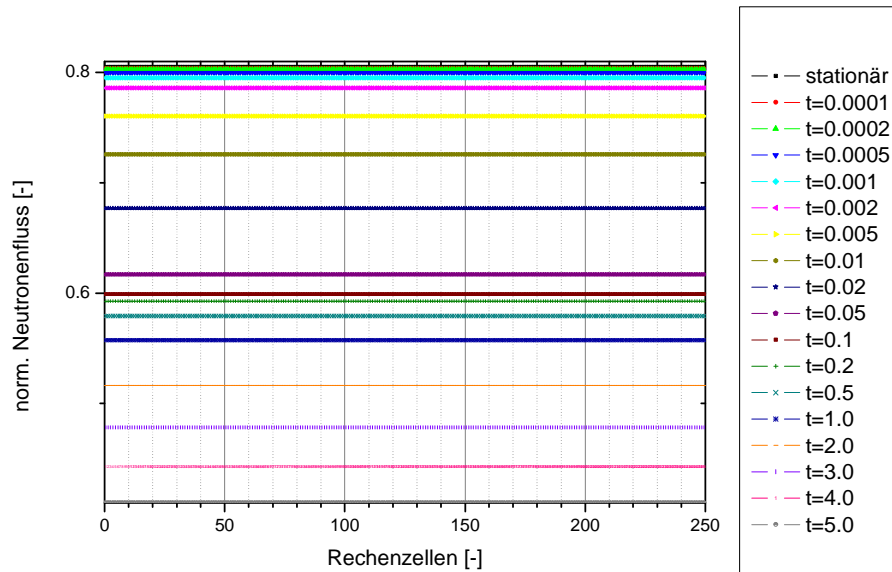


Abb. 7-8: Zeitliche Veränderung der normierten Verteilung des Neutronenflusses nach einer negativen, globalen Störung, berechnet unter der Voraussetzung reflektierender Randbedingungen

Die Veränderung der integralen Neutronenpopulation in Abb. 7-9 gibt genaue Auskunft über die Änderung der Leistung im Gesamtsystem. Auch hier ist deutlich zu sehen, dass die Expansionslösung in guter Übereinstimmung mit der Referenzlösung, die mit PARCS erzielt wurde, ist.

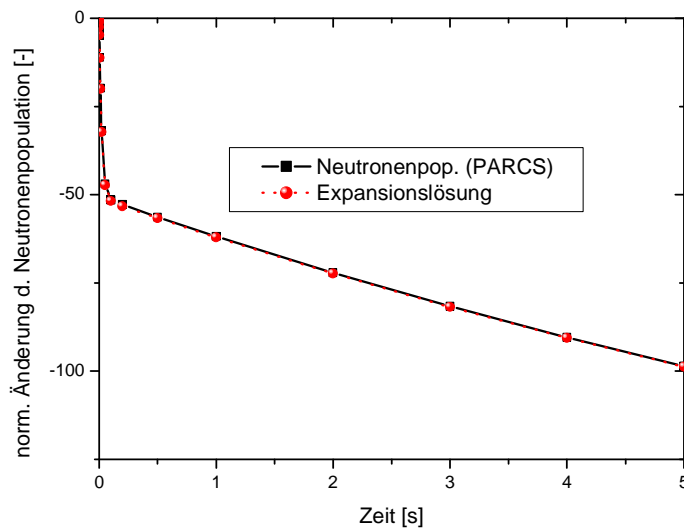


Abb. 7-9: Vergleich der durch PARCS und durch die Multiple Scale Expansion berechneten normierten Änderung der Neutronenpopulation für eine negative, globale Störung mit reflektierenden Randbedingungen

Im Falle einer lokal begrenzten Störung sind die Ergebnisse die mit der Multiple Scale Expansionslösung erzielt werden können erwartungsgemäß, aus den vorgegebenen Entwicklungsbedingungen resultierend, nicht so gut wie für den Fall einer globalen Störung. Der zeitliche, rein kinetische Leistungsverlauf für eine negative, lokale Störung ist in Abb. 7-10 dargestellt. Der mit der Expansionslösung berechnete Leistungsverlauf weicht deutlich vom mit PARCS berechneten ab. Während mit der Expansionslösung das Ergebnis absolut um etwa 1% überschätzt wird, weicht das Ergebnis für die Lösung mit dem punktkinetischen Verfahren etwa

0.25% nach unten ab. Die relevanteren relativen Fehler betragen für die Expansionslösung etwa 30% und für punktkinetische Lösung etwa 10%.

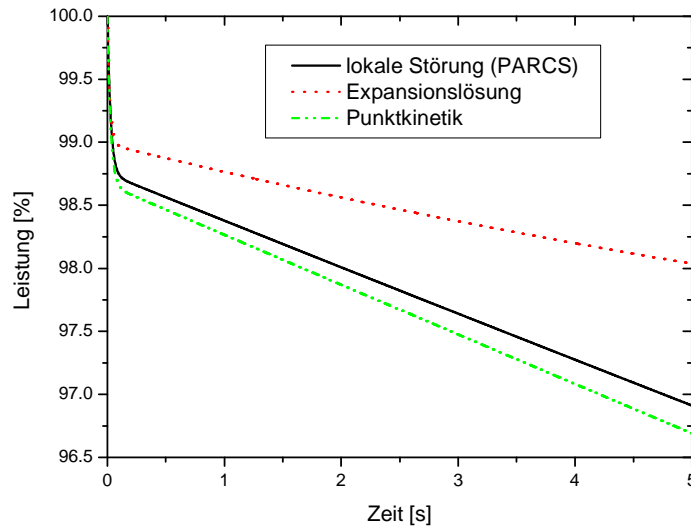


Abb. 7-10: Vergleich zwischen der mit PARCS und der durch die Expansionslösung bestimmten Leistungsentwicklung für eine negative, lokale Störung

Eine Erklärung für die Abweichungen, sowohl im punktkinetischen Verfahren als auch im Expansionsverfahren kann in Abb. 7-11 abgelesen werden. Die räumliche Verteilung des Neutronenflusses ist im Fall der lokalisierten Störung keineswegs mehr konstant wie im Falle der globalen Störung (siehe Abb. 7-8). Die negative, lokale Störung (im Bereich 120-130) breitet sich in kurzer Zeit über das gesamte System aus und beeinflusst damit auch hier nicht nur den Neutronenfluss im gestörten Bereich, sondern auch in allen anderen Bereichen.

In der punktkinetischen Näherungslösung wird die Störung, wie bereits beschrieben, über das gesamte System verschmiert. Die Unterbewertung des Ergebnisses ist durch diese Verteilung der Störung über das ganze System bedingt. In der Näherung werden alle neuen Neutronen in einem leicht gestörten System geboren, in Realität gibt es aber einen Teil Neutronen die direkt im Bereich der Störung entstehen und sich im Bereich der geringeren Multiplizität natürlich schneller reduzieren.

In der Expansionslösung wird das Ergebnis, wie bereits beschrieben, überbewertet. Hier tritt der zur punktkinetischen Näherung gegenteilige Effekt auf. Nachdem im Expansionsverfahren die Änderung in jeder Zelle durch die vorgegebene Entwicklungsbedingung für sich betrachtet wird, sich also adiabat verhält, strömen hier zu wenige Neutronen in den Bereich der durch die Störung verminderten Multiplizität. In Realität strömt ein nicht zu vernachlässigender Teil Neutronen aus dem ungestörten Teil des Systems in den gestörten Teil des Systems und wird dort im Bereich geringerer Multiplizität geringfügiger vermehrt als es im ungestörten Bereich der Fall wäre. Der Effekt der räumlichen Verteilung ist in Abb. 7-11 deutlich zu sehen.

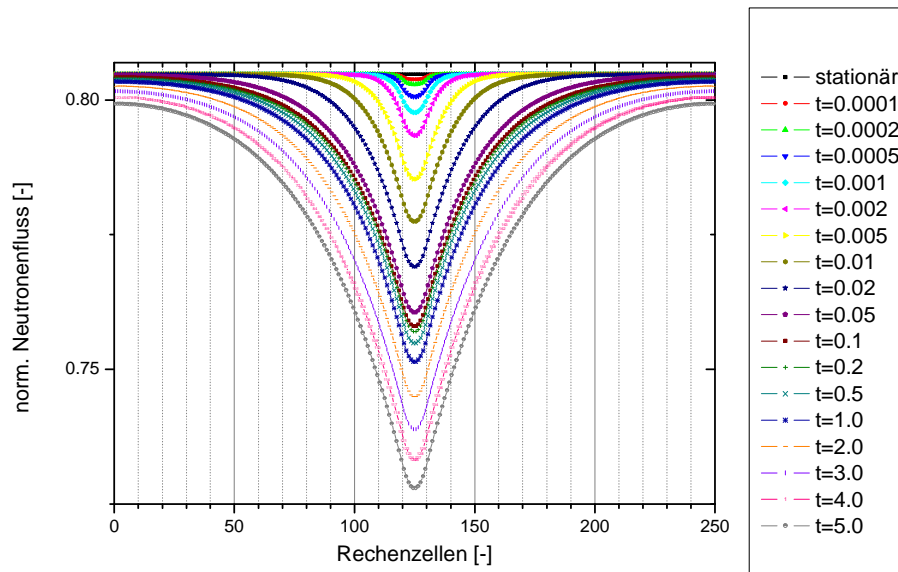


Abb. 7-11: Zeitliche Veränderung der normierten Verteilung des Neutronenflusses nach einer negativen, lokalen Störung, berechnet unter der Voraussetzung reflektierender Randbedingungen

Die Auswirkungen der Störung auf die integrale Neutronenpopulation ist in Abb. 7-12 dargestellt. Während in der punktkinetischen Näherung die integrale Änderung der Neutronenpopulation gegenüber der vollnumerischen Lösung nur sehr geringfügig unterschätzt wird, wird das Ergebnis in der Expansionslösung relativ deutlich überschätzt. Diese Wertung gilt aber, auch hier wie bereits beschrieben, nur für genau dieses vorgegebene System.

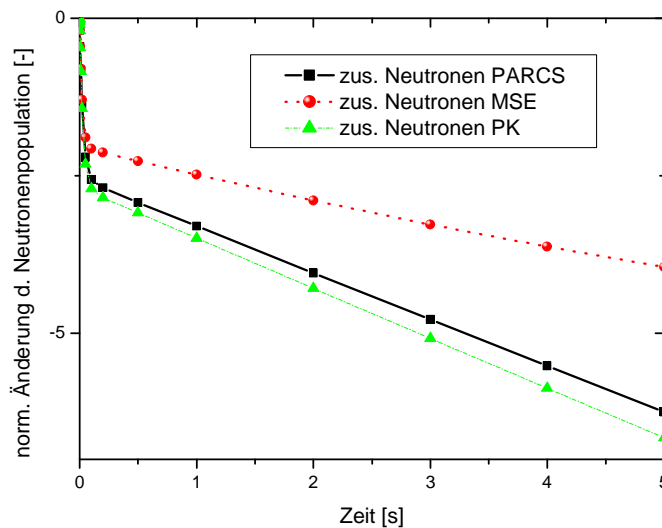


Abb. 7-12: Vergleich der durch PARCS und durch die Multiple Scale Expansion berechneten normierten Änderung der Neutronenpopulation für eine negative, lokale Störung mit reflektierenden Randbedingungen

Nach den nulldimensionalen Betrachtungen mit allseitig reflektierenden Randbedingungen, wird das System im nächsten Schritt in eindimensionaler Form betrachtet. Um ein eindimensionales System zu erzeugen wurden in einer Richtung die Randbedingungen auf „keine einströmenden Neutronen“ verändert. Die, einer globalen positiven Störung, folgende Leistungsentwicklung ist in Abb. 7-13 dargestellt. Die Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen von PARCS und der Expansionslösung ist für die globale Störung wiederum sehr gut.

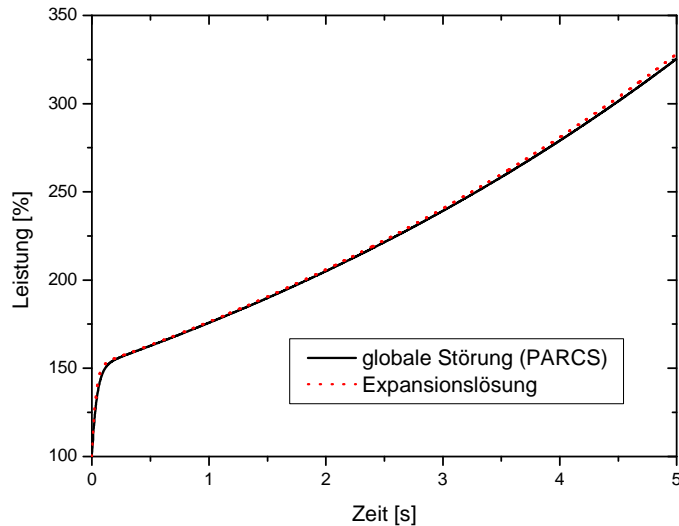


Abb. 7-13: Vergleich zwischen der mit PARCS und der durch die Expansionslösung bestimmten Leistungsentwicklung für eine positive, globale Störung in einer eindimensionalen unendlich ausgedehnten Platte

Die, aufgrund des eindimensionalen Aufbaus, entstehende Neutronenflussverteilung ist in Abb. 7-14 dargestellt. Es stellt sich eine kosinusförmige Verteilung des Neutronenflusses ein. Der Neutronenfluss steigt während der gesamten Zeit, für die die rein kinetische Neutronenflussentwicklung berechnet wurde, an. Der zeitliche Verlauf der Neutronenflussentwicklung kann an den unterschiedlichen zur Darstellung verwendeten Farben und Symbolen abgelesen werden. Der zeitliche und räumliche Verlauf kann auch problemlos durch die Multiple Scale Expansion nachgebildet werden. Die Berechnung der Neutronenflussentwicklung, unabhängig für jede einzelne Zelle führt hier zu einem guten Ergebnis, denn die Austauschterme zwischen den einzelnen Zellen neutralisieren sich aufgrund der in allen Bereichen identischen Störung.

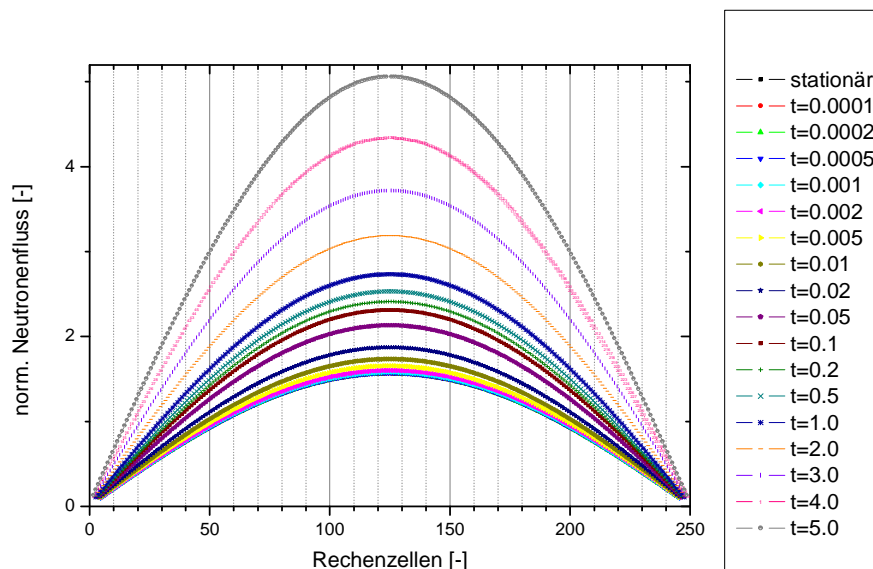


Abb. 7-14: Zeitliche Veränderung der normierten Verteilung des Neutronenflusses nach einer positiven, globalen Störung für eine eindimensionale, unendlich ausgedehnte Platte

Abb. 7-15 zeigt einen direkten Vergleich der Lösungen aus PARCS und der Expansionslösungen an ausgewählten Zeitschritten. Die Übereinstimmung der Ergebnisse ist in allen Zeitschritten sehr gut. Sowohl der räumliche als auch der zeitliche Verlauf einer globalen Störung in einem eindimensionalen System kann also mit der Expansionslösung problemlos berechnet

werden. Durch eine geringfügige Erweiterung der Expansionslösung könnten diese Erkenntnisse auch auf ein dreidimensionales System übertragen werden, denn die Neutronenflussverteilung für einen Quader setzt sich lediglich aus drei Kosinusverteilungen zusammen.

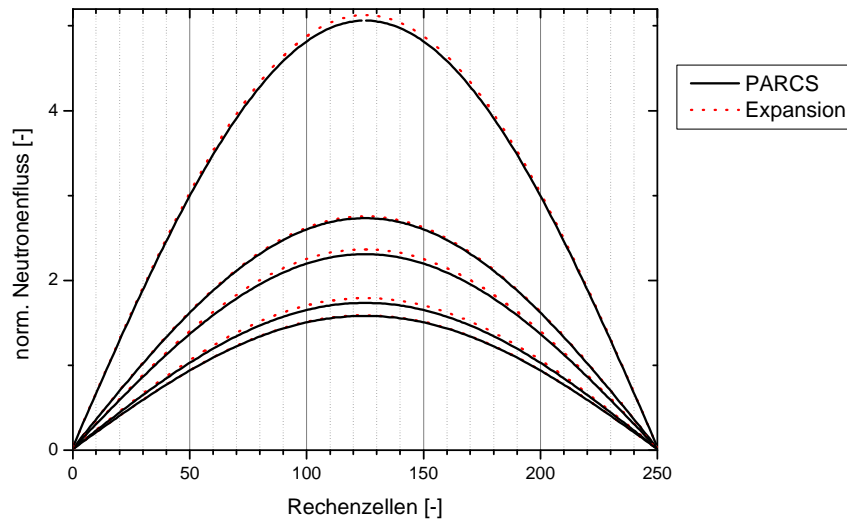


Abb. 7-15: Vergleich der mit PARCS und durch die Multiple Scale Expansion bestimmten zeitlichen Veränderung der normierten Verteilung des Neutronenflusses nach einer positiven, globalen Störung für eine eindimensionale, unendlich ausgedehnte Platte

An dieser Stelle werden die Vergleiche zwischen PARCS und der Expansionslösung abgebrochen. Zum einen sind die Hauptprobleme bereits deutlich demonstriert worden. Zum anderen ist die verwendete PARCS Version nur für die Lösungen der Diffusionsgleichung ausgelegt, weitere Tests wären nur für die Neutronentransportgleichung von Interesse.

7.2 Zusammenfassung

Die Testrechnungen zum direkten Einsatz der Expansionslösung im Rahmen eines nodalen Rechenverfahrens zeigen erwartungsgemäß nur für globale Störungen, in denen sich die Austauschterme zwischen den einzelnen Rechenzellen aufheben, gute Ergebnisse. Diese guten Ergebnisse sind sowohl für ein unendlich ausgedehntes System, als auch für ein eindimensionales System demonstriert worden. Die Ergebnisse für diese Fälle sind den Ergebnissen für die punktkinetischen Gleichungen sehr ähnlich und können auch mit diesem Verfahren erzielt werden. Die Ergebnisse für lokale Störungen sind im momentanen Entwicklungsstadium nicht für zuverlässige Näherungslösungen verwendbar. Dies ist auch aufgrund der vorgegebenen Randbedingungen für die Entwicklung der Modelle nicht zu erwarten. Die entstehen Probleme liegen aber nicht im angewandten Verfahren begründet, sondern in den momentanen Entwicklungsbedingungen des Modells. Eine Einbindung des Neutronenaustausches zwischen den benachbarten Zellen und damit der raum-zeitabhängigen Ausbreitung einer Störung ist für eine zukünftige Anwendung notwendig, war aber nicht im Rahmen dieser Arbeit vorgesehen.

8 STRATEGIE ZUR WEITERENTWICKLUNG DES VERFAHRENS

Nach den im vorhergegangenen Abschnitt, Anwendung innerhalb eines nodalen Verfahrens, gewonnenen Erkenntnissen über die mangelhafte Qualität der Anwendung der für eine homogene Zelle entwickelten Expansionslösung bei lokalen Störungen soll hier ein Ausblick auf eine Möglichkeit zur Entwicklung einer verbesserten Näherungslösung für das raum-zeitverhalten im lokal gestörten System aufgezeigt werden. Das Hauptaugenmerk soll hier weiterhin auf der Ermittlung einer Näherungslösung ohne Trennung von Raum und Zeit liegen. Die Grundlage einer derart beschriebenen Näherungslösung sollen drei Ansätze liefern, zum Einen die Lösung für die Änderung des raum-zeitabhängigen Neutronenflusses in einem System mit einer lokalen Störung und zum Anderen das Prinzip der Superposition von Störungen in einem System und Zuletzt eine Kompensationsfunktion für die integrale Neutronenproduktion durch die gegenseitige Beeinflussung der superpositionierten Störungen.

Die Anwendbarkeit der vorgesehenen Ansätze zur Entwicklung der Näherungslösung soll anhand eindimensionaler Rechnungen veranschaulicht werden. Der erste Schritt besteht in der Ermittlung der raum-zeitabhängigen Neutronenflussverteilung für einen gestörten Bereich in einem ansonsten ungestörten, unendlich ausgedehnten System. Das mit PARCS numerisch berechnete Ergebnis für eine Störung im Bereich der Rechenzellen 120 – 130 ist in Abb. 8-1 dargestellt und wurde bereits für das vorhergehende Kapitel (Abb. 7-5) ermittelt, jedoch im folgenden Bild relativ ausgewertet. Diese Lösung wird für die weitere Verwendung mit der Bezeichnung: Störung 0 versehen. Ziel ist die Entwicklung einer analytischen Näherungslösung für die vorgegebene Funktion in Raum und Zeit. Nach einer Lösung des eindimensionalen Systems kann relativ einfach eine erste dreidimensionale Lösung, in Form eines Ansatzes für eine Punktquelle unter Verwendung von Kugelkoordinaten angestrebt werden. Eine für die Weiterentwicklung des Verfahrens wichtige Erkenntnis aus Abb. 8-1 ist die Form der Ausbreitung in der hier visualisierten, relativen Betrachtung. Der Raum-Zeitverlauf der Störung repräsentiert im ungestörten Bereich die Ausbreitung von, aus einer Quelle zuströmenden, Neutronen in einem nicht multiplizierenden System. Für die relative Betrachtung verändert sich die Multiplikation in den nicht gestörten Bereichen nicht, deshalb kann das System für die kinetische Betrachtung als nicht multiplizierend angesehen werden. Dies vereinfacht, oder ermöglicht die vorgesehene Entwicklung einer analytischen Näherungsfunktion.

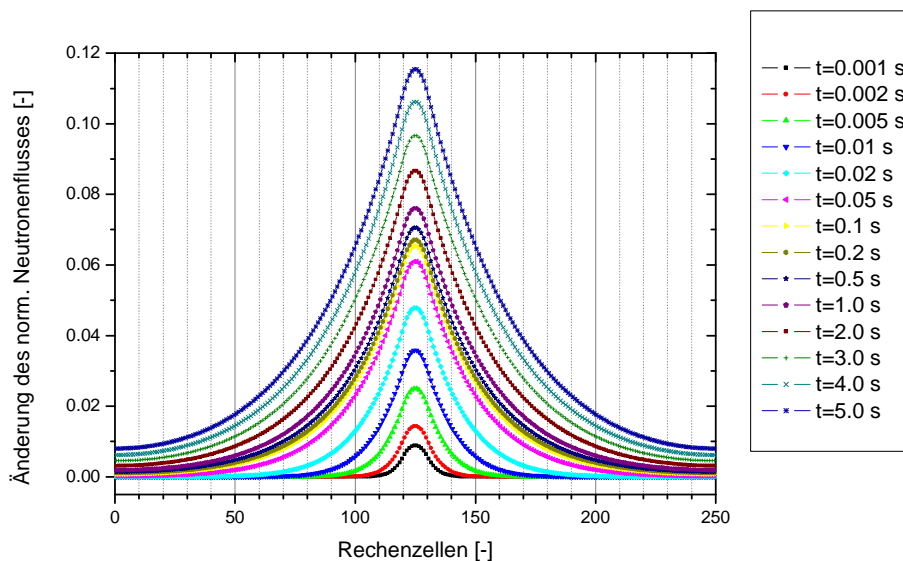


Abb. 8-1: Raum-Zeitverlauf der Änderung des normierten Neutronenflusses für eine lokale, positive Störung im unendlich ausgedehnten System (= Störung 0)

Der nächste Schritt nach der Ermittlung einer Näherungslösung für einen gestörten Bereich in einem ansonsten ungestörten System ist der Übergang zu einem System mit mehreren gestörten Bereichen. In Abb. 8-2 ist die mit PARCS berechnete Lösung für das einfachste derartige System, zwei gestörte Bereiche in einem ansonsten ungestörten, unendlich ausgedehnten System, dargestellt. Die gestörten Bereiche befinden sich zwischen den Rechenzellen 70 – 80 und 140 – 150. Es zeigt sich in den beiden gestörten Bereichen ein Raum-Zeitverlauf, wie er bereits in Abb. 8-1 zu sehen ist, lediglich im Bereich zwischen den beiden Störungen findet nach kurzer Zeit ($t = 0.01$ s) eine deutliche Überlagerung der beiden Störungen statt.

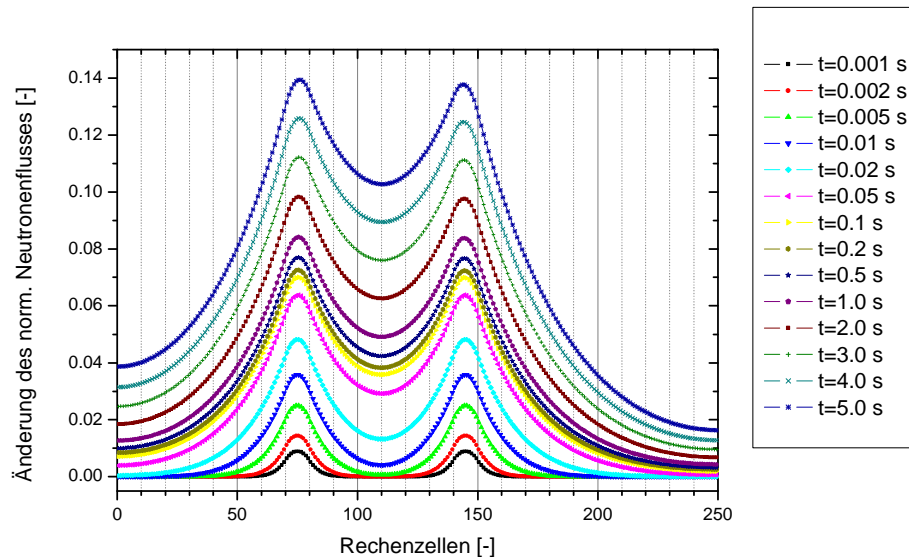


Abb. 8-2: Raum-Zeitverlauf der Änderung des normierten Neutronenflusses für zwei lokale, positive Störungen im unendlich ausgedehnten System (Störung 0 und 0)

Abb. 8-3 zeigt das Ergebnis einer Superposition der Störung aus zwei Lösungen für die vorgegebene Störung 0 (siehe Abb. 8-1). Das Ergebnis entstand aus der jeweiligen Verschiebung der mit PARCS berechneten Lösung für die Störung 0 in den gestörten Bereich, also einmal 70 – 80 und einmal 140 – 150. Die beiden Ergebnisse wurden dann zur abgebildeten, raum-zeitabhängigen Neutronenflussverteilung superpositioniert. Im Randbereich konnte der Neutronenfluss für diesen ersten Fall nicht bestimmt werden, denn die Lösung für die Störung 0 ist auf die bisher verwendeten 250 Rechenzellen limitiert. Durch die Verschiebung der Verteilung aus der Mitte des Systems entstehen deshalb Lücken in den Randbereichen. Dieses Problem ließe sich aber problemlos durch eine veränderte Aufteilung der Rechenzellen beheben, oder erledigt sich für den Fall einer analytischen Näherungslösung sowieso.

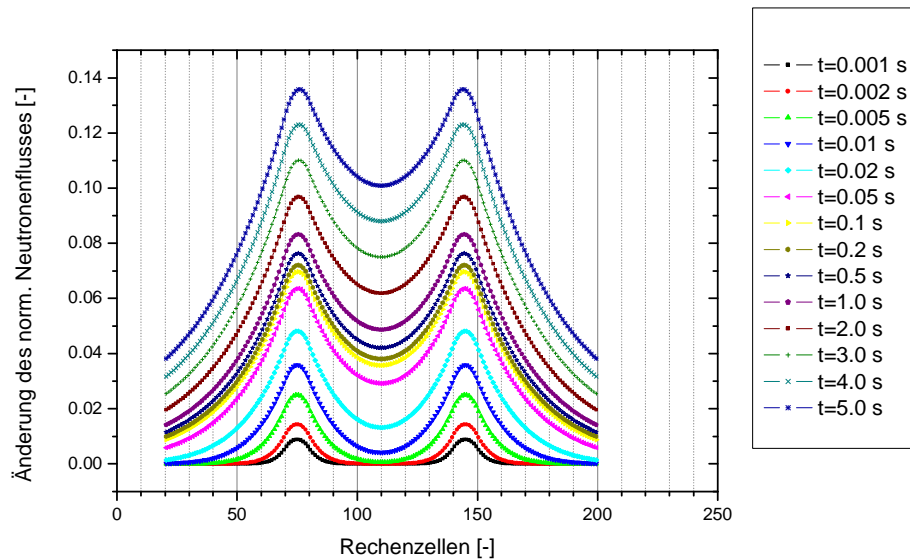


Abb. 8-3: Raum-Zeitverlauf der superpositionierten Näherungslösung der Änderung des normierten Neutronenflusses für zwei lokale, positive Störungen im unendlich ausgedehnten System (Störung 0 + Störung 0)

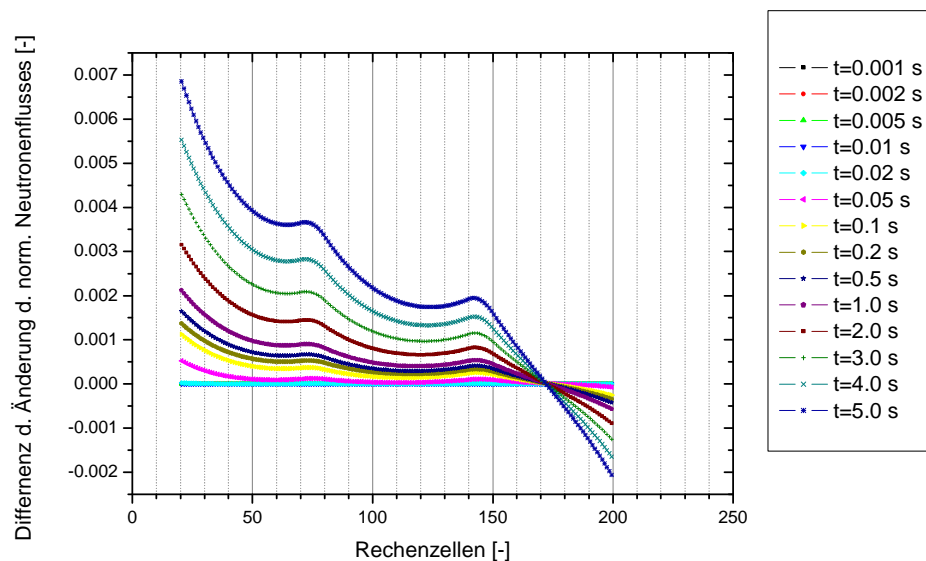


Abb. 8-4: Differenz des Raum-Zeitverlaufs der Änderung des normierten Neutronenflusses aus der exakten Lösung (Störung A und B) und der Näherungslösung (Störung 0 + Störung 0)

Die Bildung der Differenz zwischen den Ergebnissen aus Abb. 8-2 und Abb. 8-3 erlaubt eine genauere Analyse der Qualität der durch Superposition gewonnenen Näherungslösung für das System mit zwei gestörten Bereichen. Diese Differenz ist in Abb. 8-4 für den in der Superpositionslösung ermittelbaren Bereich dargestellt. Bemerkenswert ist der selbst am Ende der Rechenzeit (5 s) geringe relative Fehler von 5 %, der sich zudem noch im äußeren, ungestörten Bereich ergibt. Im zentralen Bereich zwischen den gestörten Bereichen bleibt der relative Fehler durchweg kleiner 2 %.

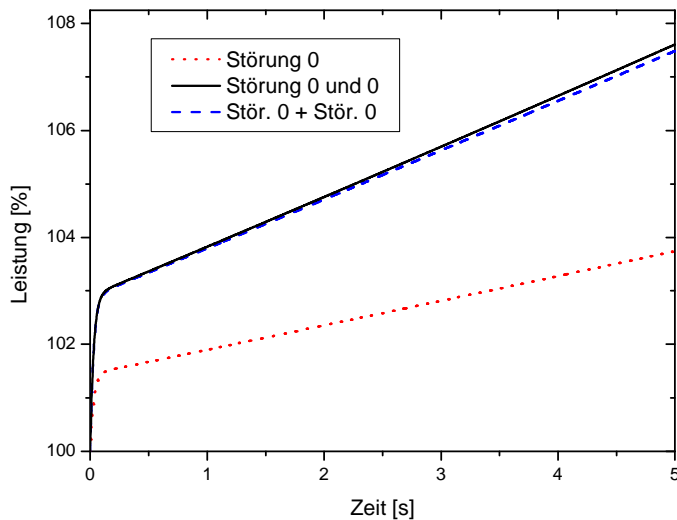


Abb. 8-5: Vergleich der Leistungsentwicklung für die exakte Lösung (Störung 0 und 0) und die Näherungslösung (Störung 0 + Störung 0)

Ein ähnlich gutes Ergebnis ergibt sich für die in Abb. 8-5 dargestellte Leistung des Systems. Die zeitliche Leistungsentwicklung stellt eine integrale Größe zur Beurteilung der Qualität der Näherungslösung dar. Die relative Abweichung in der Leistung zwischen der exakten und der Näherungslösung ist am Ende der Rechenzeit kleiner 2 %.

Ein weiterer Zwischenschritt zu einer Verbesserung der Näherungslösung für ein reales System besteht in der Einführung eines eindimensionalen, endlichen Systems. Hierfür gilt es ebenfalls zuerst eine analytische Näherungslösung für die raum-zeitabhängige Neutronenflussverteilung zu entwickeln. Im Anschluss daran kann dann ebenfalls eine Superposition der berechneten Neutronenflussverteilungen stattfinden. Im endlichen System gilt es allerdings zu beachten, dass die Änderung des Neutronenflusses in Folge einer Störung nicht mehr ortsunabhängig ist, wie im unendlich ausgedehnten System, sondern eine deutliche Abhängigkeit von der Position der Störung entsteht. Im Falle eines endlichen Systems müssen also die raum-zeitabhängigen Neutronenflussverteilungen für jede Störung extra berechnet werden. In den folgenden Abbildungen sind die beiden numerisch, mit PARCS, berechneten Ergebnisse für die Störungen in den Bereichen 70 – 80, bezeichnet als Störung A (Abb. 8-6) und 140 – 150, bezeichnet als Störung B (Abb. 8-7) dargestellt. In beiden Abbildungen ist die deutlich unterschiedliche Ausbreitung der Änderung des normierten Neutronenflusses zu beachten.

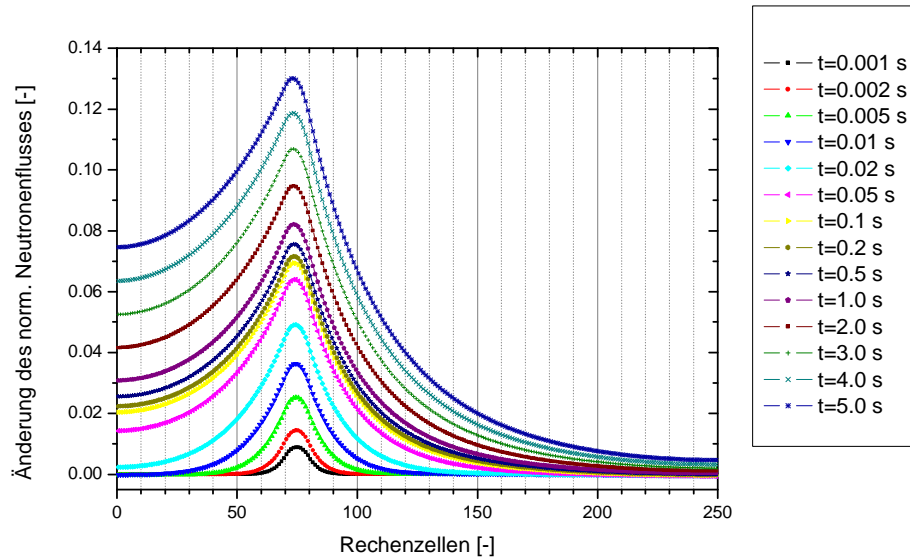


Abb. 8-6: exakter Raum-Zeitverlauf der Änderung des normierten Neutronenflusses für eine lokale, positive Störungen (Störung A)

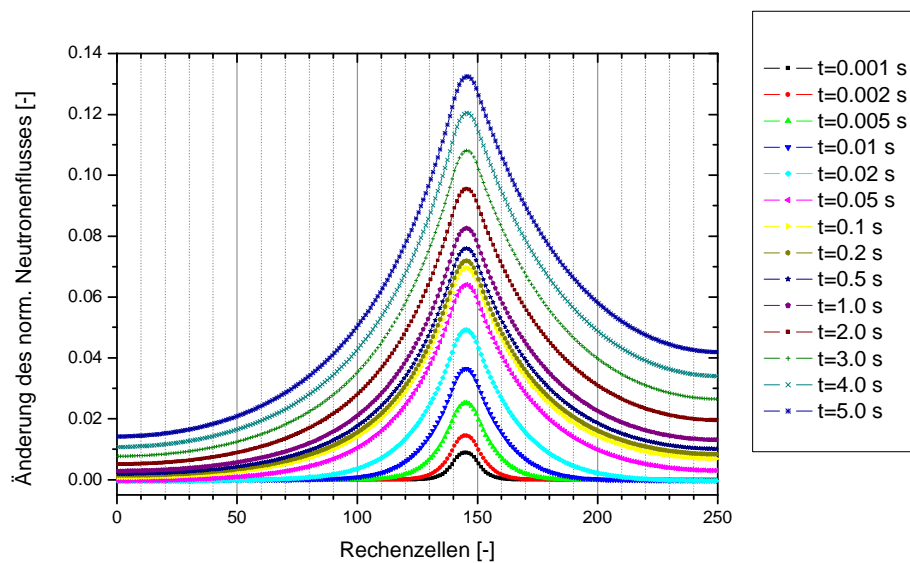


Abb. 8-7: exakter Raum-Zeitverlauf der Änderung des normierten Neutronenflusses für eine lokale, positive Störungen (Störung B)

Die mit PARCS berechnete Vergleichslösung für das System mit zwei gestörten Bereichen ist in Abb. 8-8 dargestellt. Auch hier kann deutlich beobachtet werden, dass sich die beiden Störungen im Bereich der Zellen 70 – 80 und 140 – 150 schon nach sehr kurzer (>0.01 s) gegenseitig beeinflussen.

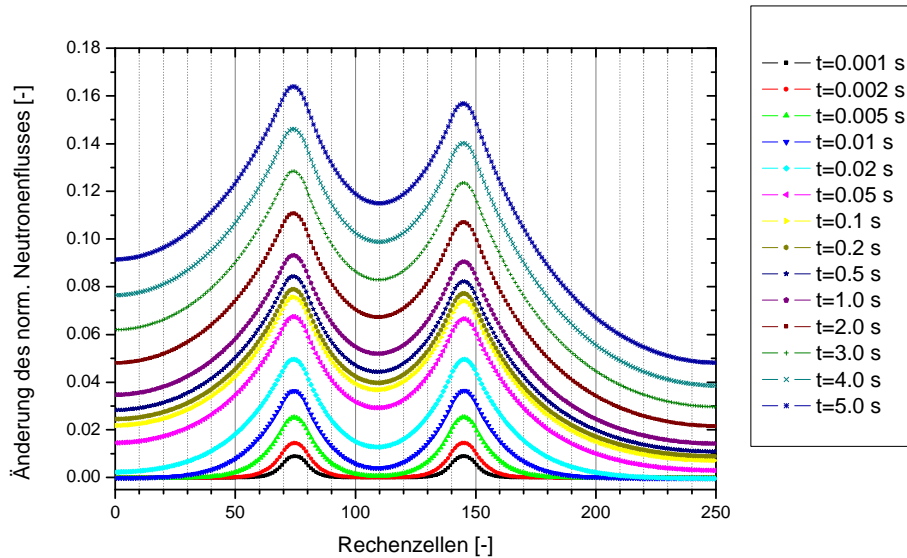


Abb. 8-8: exakter Raum-Zeitverlauf der Änderung des normierten Neutronenflusses für zwei lokale, positive Störungen (Störung A und B)

Die durch Superposition der Lösung für Störung A und Störung B gewonnene Näherungslösung für das System mit den zwei gestörten Bereichen ist in Abb. 8-9 dargestellt. Die Überlagerung der beiden Störungen ergibt sowohl qualitativ als auch quantitativ ein sehr gutes Ergebnis. Wobei bereits hier die Beeinflussung der integralen Neutronenproduktion durch die beiden Störungen, der in der Superposition nicht berücksichtigt wird, in der Betrachtung über einen längeren Zeitraum sichtbar wird.

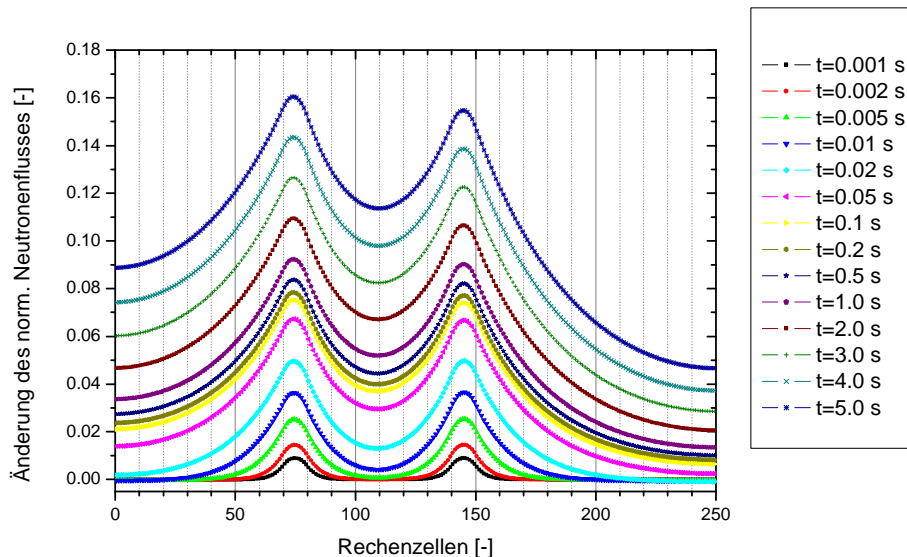


Abb. 8-9: Raum-Zeitverlauf der superpositionierten Näherungslösung der Änderung des normierten Neutronenflusses für zwei lokale, positive Störungen (Störung A + Störung B)

Zur detaillierten Analyse der Qualität der Näherungslösung ist in Abb. 8-10 die Differenz zwischen der exakten, mit PARCS berechneten, Lösung und der, durch Superposition erzielten, Näherungslösung bestimmt. Die maximale, relative Abweichung zwischen den beiden Lösungen bewegt sich im Bereich unter 2 %, das Maximum tritt im Bereich der gestörten Zone A auf.

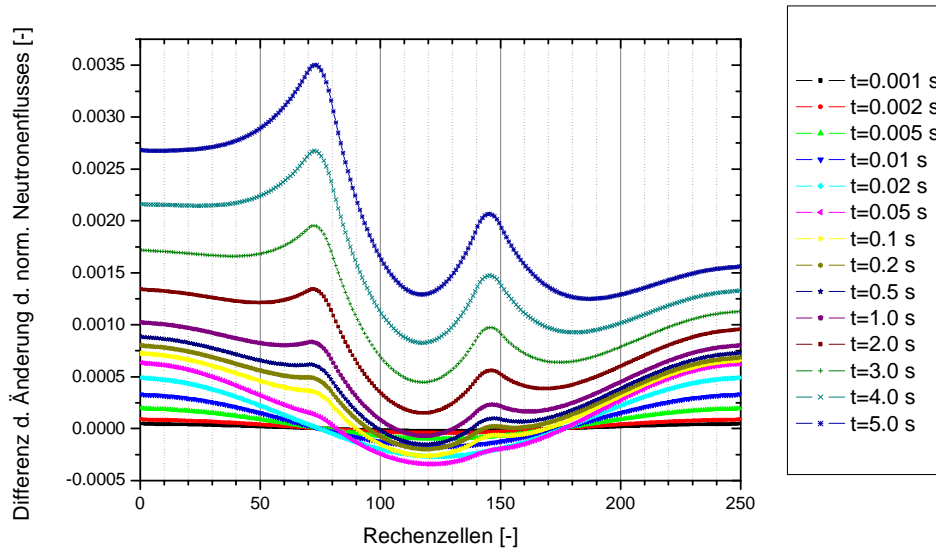


Abb. 8-10: Differenz des Raum-Zeitverlaufs der normierten Neutronenflussänderung aus der exakten Lösung (Störung A und B) und der Näherungslösung (Störung A + Störung B)

Ein ähnlich gutes Ergebnis ergibt sich für die in Abb. 8-11 dargestellte Leistung des endlichen Systems. Die zeitliche Leistungsentwicklung stellt eine integrale Größe zur Beurteilung der Qualität der Näherungslösung dar. Die Abweichung in der Leistung zwischen der exakten und der Näherungslösung ist am Ende der Rechenzeit kleiner 2 %. Diese Abweichung ist allerdings auf die gegenseitige Beeinflussung der gestörten Zellen zurückzuführen und damit als systemimmanent für die reine Superposition zu betrachten.

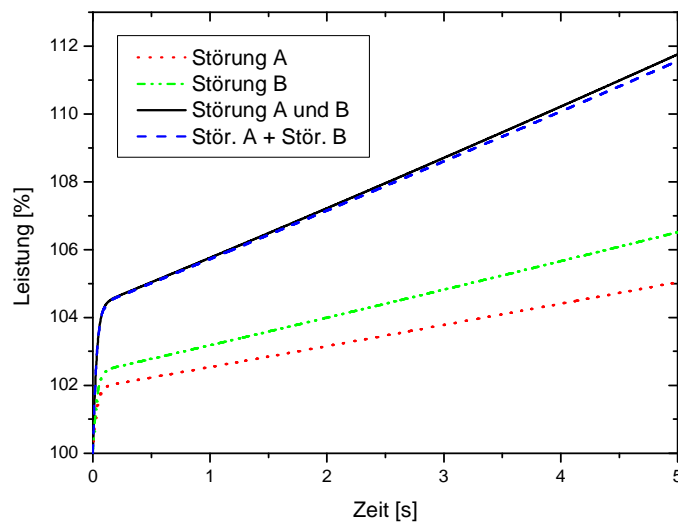


Abb. 8-11: Vergleich der Leistungsentwicklung für die exakte Lösung (Störung A und B) und die Näherungslösung (Störung A + Störung B)

Die bisher betrachteten Probleme waren jeweils auf eine Störung in lediglich 2 Bereichen limitiert. Für den Fall eines komplett gestörten Systems kann zum Vergleich der Leistung auf die Lösung aus Abschnitt 7, Abb. 7-13 zurückgegriffen werden. Im komplett gestörten System heben sich die Austauschterme zwischen den Zellen gegenseitig auf und die Leistung entwickelt sich, entlang der punktkinetischen Ergebnisse, für jeden einzelnen Knoten. Unter dieser Voraussetzung führt die vorgeschlagene Näherungslösung durch Superposition deshalb sicherlich nicht zum richtigen Ergebnis. In den folgenden Abbildungen soll der Fokus genau auf diesen systemimmanenten Sachverhalt gelenkt werden. Abb. 8-12 zeigt die Entwicklung des

exakten, mit PARCS berechneten, Raum-Zeitverlaufs der Neutronenflussänderung für 4 gestörte Zellen.

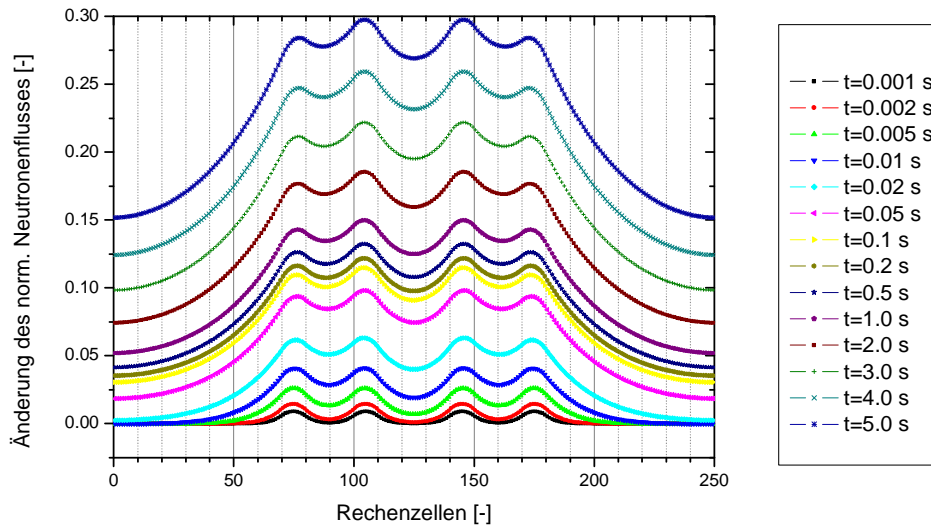


Abb. 8-12: exakter Raum-Zeitverlauf der Änderung des normierten Neutronenflusses für vier lokale, positive Störungen (Störung A, B, -A und -B)

Abb. 8-13 zeigt den mit der Näherungslösung ermittelten Raum-Zeitverlauf der Neutronenflussänderung für 4 gestörte Bereiche. Hier ist zur Vereinfachung der Rechnung auf die bereits für die Betrachtung der Superposition von Störungen unter Betrachtung der Randbedingungen eingeführten Störungen A und B zurückgegriffen. Diese wurden für die zwei zusätzlichen gestörten Bereiche lediglich gespiegelt. Der räumliche Verlauf der Neutronenflussänderung sieht auch für den Fall mit 4 gestörten Bereichen qualitativ sehr gut aus. Quantitativ ist allerdings zu erkennen, dass die Neutronenflussänderung nach 5 s bereits relativ deutlich unterschätzt wird, weil die Wechselwirkung zwischen den Zellen nicht in Betracht gezogen wird.

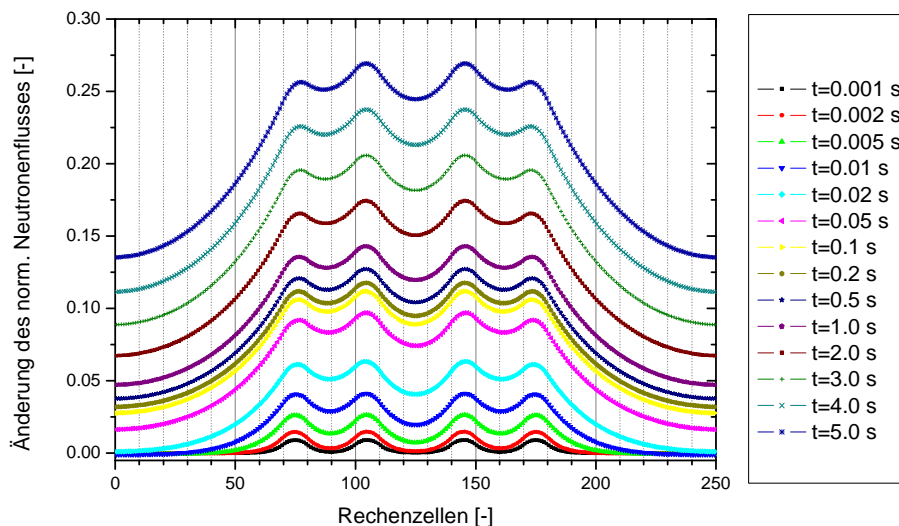


Abb. 8-13: Raum-Zeitverlauf der superpositionierten Näherungslösung der Änderung des normierten Neutronenflusses für vier lokale, positive Störungen (Störung A + Störung B + Störung -A + Störung -B)

Die eben beschriebene Tendenz ist, nach der Bildung der Differenz zwischen der exakten Lösung und der Näherungslösung, in Abb. 8-14 noch wesentlich deutlicher zu sehen. Die Abweichung wächst mit zunehmender Laufzeit der Störung deutlich an und hat am Ende der Rechnung bereits, relativ gesehen, rund 10 % der exakt berechneten Gesamtänderung

erreicht. Die hier erkennbare Tendenz der Abweichung der Näherungslösung für eine steigende Anzahl der gestörten Zellen wird sich bis zum Erreichen des komplett gestörten Systems fortsetzen. Diese systemimmanente Abweichung erklärt sich aus der, mit steigender Anzahl gestörter Zellen zunehmenden gegenseitigen Beeinflussung der Neutronenpopulation. Diese Wechselwirkung kann im bisher angedachten System nicht abgebildet werden, denn sie ist wiederum in den Bedingungen zur Entwicklung des Modells noch nicht berücksichtigt. Die Wahrscheinlichkeit für ein Neutron, das die gestörte Zelle verlässt, wieder in einen gestörten Bereich einzutreten, wächst mit zunehmender Zahl der gestörten Bereiche. Im Extremfall des komplett gestörten Systems wird ein aus einem gestörten Bereich austretendes Neutron direkt in den nächsten gestörten Bereich eintreten, damit hebt sich der Austausch von Neutronen zwischen den Bereichen auf.

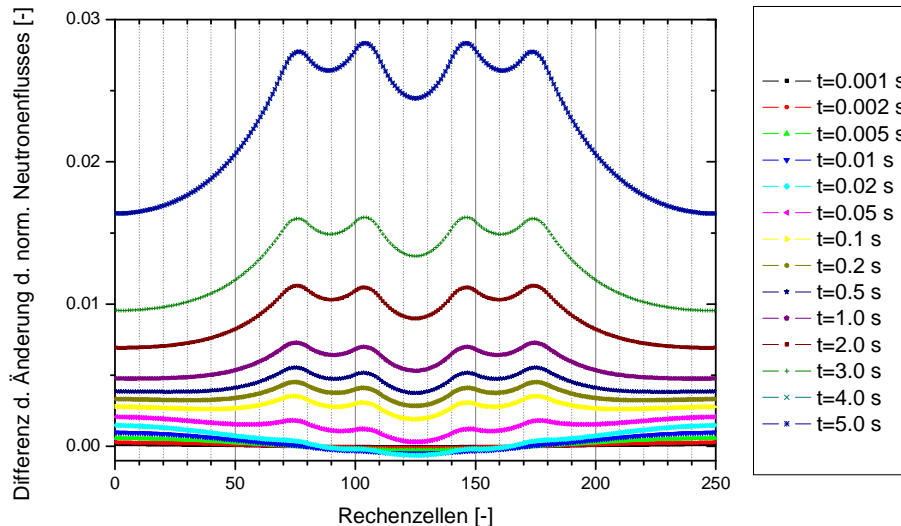


Abb. 8-14: Differenz des Raum-Zeitverlaufs der normierten Neutronenflussänderung aus der exakten Lösung (Störung A, B, -A und -B) und der Näherungslösung (Störung A + Störung B + Störung -A + Störung -B)

Die beschriebene Tendenz schlägt sich natürlich auch deutlich in der Leistungsentwicklung nieder (Abb. 8-15). In der Leistung, die aus dem Integral der Neutronenflussänderung bestimmt wird, beträgt die relative Differenz am Ende der Rechnung auch bereits nahezu 10 %.

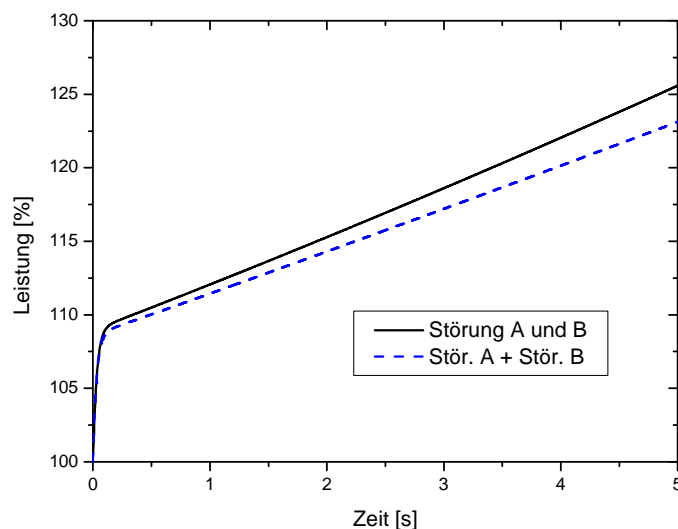


Abb. 8-15: Vergleich der Leistungsentwicklung für die exakte Lösung (Störung A, B, -A und -B) und die Näherungslösung (Störung A + Störung B + Störung -A + Störung -B)

Dieses Problem der gegenseitigen Beeinflussung von Störungen gilt es als letzten Schritt zu lösen. Hier sind zwei unterschiedliche Herangehensweisen zu untersuchen.

Ein Weg zielt auf die nachträgliche Korrektur des Gesamtergebnisses durch eine von der Anzahl der gestörten Bereiche und der Stärke der jeweiligen Störung abhängigen Korrekturfunktion. Diese Korrekturfunktion muss natürlich für den Fall eines komplett gestörten Systems zum durch die punktkinetische Näherung vorgegebenen Ergebnis kommen. Diese Verfahrensweise beruht auf der Erkenntnis, dass durch die Addition der einzeln berechneten Verteilungsfunktionen bereits die richtige Neutronenflussverteilung im System berechnet wurde, das Integral der Neutronenflussänderung allerdings von der Anzahl der Störungen abhängig ist.

Der andere, vielversprechendere Weg liegt in der Korrektur der Rechnungen für die einzelnen Bereiche. Anstatt wie bisher den gestörten Bereich vor dem Hintergrund eines ungestörten Systems zu berechnen, wäre es möglich die anderen Störungen verschmiert in den Hintergrund einzubinden. Dies führt hin, zu einer Betrachtung der relativen Differenz zwischen der gestörten Zelle und des umgebenden Bereiches. Durch dieses Verfahren würde die Anzahl der aus den gestörten Bereichen austretenden Neutronen verringert, denn die für die Ausbreitung der Neutronen verantwortliche Differenz zwischen dem Multiplizitätsniveau des gestörten Bereichs und dem Hintergrund würde verringert.

9 ZUSAMMENFASSUNG

Grundlage für die Simulation von Betriebstransienten und Störfällen in Kernreaktoren ist die zuverlässige Berechnung des Zeitverlaufes der nuklearen Leistung. Die nukleare Leistungserzeugung wird aus dem sowohl räumlich als auch zeitlich veränderlichen Neutronenfluss berechnet. Der Neutronenfluss wird durch die raum-, zeit-, richtungs- und energieabhängige Boltzmanngleichung (Transportgleichung) beschrieben. Die Berechnung exakter numerischer Lösungen der Boltzmanngleichung ist sehr zeitintensiv, deshalb sind für die praktische Anwendung Näherungslösungen im Allgemeinen unumgänglich.

Ziel der Arbeit ist die Entwicklung von effektiven mehrskaligen Näherungslösungen für die Boltzmanngleichung. Im Rahmen dieser neu entwickelten Näherungslösung wird, im Gegensatz zu den bisher veröffentlichten Methoden, auf eine Trennung von Raum und Zeit verzichtet. Die effektiven Näherungslösungen basieren auf einer Multiple Scale Expansion des Zeitdifferentials der verschiedenen Näherungen der Boltzmanngleichung. Die Methode der Multiple Scale Expansion wird zur Reihenentwicklung der Zeitableitung angewendet, weil das Problem des, für Reaktoranwendungen typischen, steifen Zeitverhaltens eines multiplizierenden Systems mit verzögerten Neutronen durch standardmäßige Reihenentwicklungen nicht gelöst werden kann.

Multiple Scale Expansionslösungen werden im Rahmen dieser Arbeit für verschiedene Näherungen der Boltzmanngleichung, beginnend mit der Expansionslösung für die punktkinetischen Gleichungen, entwickelt. In einem ersten Anwendungstest der Multiple Scale Expansion für die punktkinetischen Gleichungen mit zwei Gruppen verzögerter Neutronen wird die Möglichkeit einer mehrskaligen Reihenentwicklung für das typische, steife Zeitverhalten eines multiplizierenden Systems mit verzögerten Neutronen analysiert. Anhand eines Vergleichs der entwickelten Näherungslösung mit der exakten analytischen Lösung für die punktkinetischen Gleichungen, wird sowohl die Anwendbarkeit als auch die Genauigkeit des Verfahrens der Multiple Scale Expansion für eine Näherungslösung mit 2 Gruppen verzögerter Neutronen getestet, und die sehr gute Übereinstimmung demonstriert. Ein Nachweis für die Anwendbarkeit der Näherung zur Abbildung eines Problems mit 6 Gruppen verzögerter Neutronen wird durch Vergleichsrechnungen geführt und ein Weg zu einer Lösung mit 4 Gruppen verzögerter Neutronen aufgezeigt. Mit dieser analytischen Reihenentwicklung, auf der Basis einer Multiple Scale Expansion für die Zeit, wird hier erstmals ein, in der Literatur bisher nicht erwähnter, Lösungsansatz zur Behandlung des Zeitdifferentials in den Gleichungen für Reaktoranwendungen genutzt. Diese mehrskalige Näherungslösung ist ein entscheidender Schritt, hin zu einer Lösungsmethode, in der die Zeitschrittweite in der kinetischen Rechnung unabhängig von der Neutronengenerationszeit wählbar ist. Dieses Verfahren bietet damit die Möglichkeit die, in numerischen Lösungsverfahren systemimmanente, Limitierung der Zeitschrittweite zu umgehen.

Eine Multiple Scale Expansionslösung wird für die raum-zeitabhängige Diffusionsgleichung für eine homogene Zelle und 2 Gruppen verzögerter Neutronen entwickelt. Diese ohne Trennung von Raum und Zeit entwickelte Lösung wird mit der standardmäßig gewonnenen exakten analytischen Lösung verglichen und führt ebenfalls zu sehr guter Übereinstimmung.

Im weiteren Rahmen dieser Arbeit gelingt es sehr gute mehrskalige Näherungslösungen für die raum-zeitabhängigen P_1 und P_3 Transportgleichungen, ebenfalls für eine homogene Zelle und 2 Gruppen verzögerter Neutronen, zu entwickeln. Mit Hilfe der Multiple Scale Expansion kann auch für diese Gleichungen eine Lösung ohne Trennung von Raum und Zeit für eine eindimensionale, homogene Zelle entwickelt werden. Erste Testrechnungen für ein fiktives Testsystem werden für alle entwickelten Lösungen erfolgreich durchgeführt und die Ergebnisse analysiert. Die durch das mehrskalige Näherungsverfahren gewonnenen Lösungen werden im Vergleich mit der Diffusionslösung, im Bezug auf die Unterschiede in der Raum-Zeitstruktur zwischen der Diffusions- und der Transportlösung, untersucht. Diese Unterschiede können durch die entwickelten Näherungslösungen erstmals direkt analysierbar gemacht werden. Bei den Untersuchungen ergeben sich selbst für das sehr einfache, komplett homogen aufgebaute System sichtbare Unterschiede zwischen den Lösungen der Diffusions- und der Transportgleichungen. Der Effekt der zusätzlichen Differentialterme auf den Zeitverlauf der P_1 und P_3 Näherungslösungen kann sowohl in der Entwicklung der Näherungsfunktionen als auch in der graphischen

graphischen Auswertung der Differenzen zwischen der Diffusions- und der Transportlösung beobachtet werden.

Auch im räumlichen Verlauf sind Unterschiede zwischen den Lösungen für die Diffusions- und die Transportgleichung deutlich sichtbar. Diese Unterschiede sind abhängig vom stationären Kritikalitätszustand des Systems.

Die entwickelten, mehrskaligen Näherungslösungen werden anschließend für die direkte Anwendung im Rahmen eines nodalen Verfahrens getestet. Zu diesem Test werden Berechnungen die mit Hilfe des neutronenphysikalischen Codes PARCS erstellt worden sind, mit Hilfe der mehrskaligen Näherungslösungen nachvollzogen. Hierbei zeigen sich erwartungsgemäß Probleme bei der Behandlung von lokalisierten Störungen in einem ansonsten ungestörten System aufgrund der Vernachlässigung der Austauschterme im Verlauf der nun möglichen, sehr langen Zeitschritte. Diese Austauschterme sind im momentanen Entwicklungsstand, die entwickelten mehrskaligen Näherungslösungen beziehen sich auf ein aus einer homogenen Zelle bestehendes System, mathematisch noch nicht eingebunden und können deshalb auch noch nicht berücksichtigt werden. Dieser Bereich der Entwicklung ist im Rahmen dieser Arbeit nicht vorgesehen. Eine zusätzliche Entwicklung der raum-zeitabhängigen Ausbreitung einer Störung in einem System mit mehreren gestörten Zellen, wie es in einem nodalen Rechencode beschrieben werden kann, würde den Rahmen einer Doktorarbeit sprengen. Für nahe an der Entwicklungsbedingung liegende, homogene Störungen können aber auch für lange Zeitschritte sehr gute Ergebnisse für das Raum-Zeitverhalten erzielt werden.

Zuletzt wird eine Lösungsstrategie, nutzbar für große Zeitschritte in der Berechnung des raum-zeitabhängigen Neutronenflusses, auf der Basis der Superposition von Störungen entwickelt. Im Rahmen der Strategie zur Weiterentwicklung des Verfahrens werden mögliche Schritte zur Einbindung der Austauschterme im Verlauf der zeitlichen Entwicklung der Neutronenpopulation in einer gestörten Zelle entwickelt und mit Hilfe des nodalen Rechencodes PARCS getestet. Hierbei wird ein bisher in der Literatur nicht erwähnter neuer Ansatz zur gleichzeitigen Berechnung der zeitlichen und räumlichen Neutronenpopulation beschrieben. Dieser veränderte Ansatz ist notwendig, um die raum-zeitabhängige Ausbreitung einer Störung über einen längeren Zeitraum verfolgen zu können. Der Ansatz weicht deutlich von allen im Kapitel Grundlagen beschriebenen, bisher angedachten und verwirklichten Verfahren ab. Im Gegensatz zu den bisher zumeist verwendeten Verfahren, die auf der Trennung von Raum und Zeit basieren, beruht dieser neue Ansatz auf der Superposition von einzelnen Störungen in einem ansonsten ungestörten oder homogen gestörten System. In einzelnen Entwicklungsschritten wird im Kapitel Strategie zur Weiterentwicklung des Verfahrens die Herangehensweise beschrieben. Entlang dieser Schritte kann ein mathematisches Modell, zuerst für die Ausbreitung einer Störung in einem ansonsten ungestörten unendlichen nicht multiplizierenden System und dann Schritt für Schritt hin zu einem an mehreren Stellen gestörten, endlichen System entwickelt werden. Diese neu entwickelte Strategie wird in einer Reihe von Testrechnungen mit dem nodalen Rechencode PARCS verifiziert. Sie eröffnet einen neuen, effizienten Weg zur Simulation des Raum-Zeitverhaltens des Neutronenflusses in Reaktorkernen.

Die, bisher für zwei Gruppen verzögerter Neutronen, mit Multiple Scale Expansion entwickelten Lösungen können mathematisch problemlos auf drei, oder vier Gruppen erweitert werden. Aus dem bisher für die Konzentration der Vorläuferkerne der verzögerten Neutronen gelösten System aus zwei Differentialgleichungen entsteht durch die Erhöhung der Anzahl der Gruppen verzögerter Neutronen lediglich ein System aus drei, bzw. vier Differentialgleichungen. Die Lösungen für dieses System sind dann nicht mehr durch die Lösung einer quadratischen, sondern einer kubischen oder biquadratischen Gleichung zu ermitteln.

10 LITERATURVERZEICHNIS

- [1] S. Flügge: „Die Ausnutzung der Atomenergie - Vom Laboratoriumsversuch zur Uranmaschine – Forschungsergebnisse in Dahlem“, Berlin-Dahlem Deutsche Allgemeine Zeitung Nr. 387 (1939)
- [2] H. Greenspan, C. N. Kelber, D. Okrent: „Computing Methods in Reactor Physics“, Gordon and Breach Science Publishers, New York (1968)
- [3] D. Smidt: „Reaktortechnik“, Band 1 Grundlagen, G. Braun, Karlsruhe (1976)
- [4] W. Killy, Hrsg: „Deutsche Biographische Enzyklopädie“, K. G. Sauer Verlag GmbH & Co. KG, München (1995)
- [5] D. Emendörfer, K. H. Höcker: „Theorie der Kernreaktoren“, Band 1: Der stationäre Reaktor, Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich (1982)
- [6] G. I. Bell, S. Glasstone: „Nuclear Reactor Theory“, Van Nostrand Reinhold Company, New York (1970)
- [7] K. O. Ott, R. J. Neuhold: „Introductory Nuclear Reactor Dynamics“, American Nuclear Society, La Grange Park II (1985)
- [8] D. Smidt: „Reaktortechnik“, Band 2 Anwendungen, G. Braun, Karlsruhe (1976)
- [9] J. F. Briesmeister, Ed.: „MCNPTM – A General Monte Carlo N-Particle Transport Code, Version 4C“, LA-13709-M, Los Alamos (2000)
- [10] E. E. Lewis, W. F. Miller Jr.: „Computational Methods of Neutron Transport“, John Wiley&Sons, New York (1984)
- [11] J. J. Kaganove: „Numerical Solution of the One-Group Space-Independent Reactor Kinetics Equations for Neutron Density Given the Excess Reactivity“, Argonne National Lab. ANL-6132 (1960)
- [12] H. G. Joo, D. A. Barber, G. Jiang, T. J. Downar: „PARCS Purdue Advanced Core Simulator“, PU/NE-02-xx, Purdue University (2002)
- [13] S. Kaplan, A. F. Henry, S. G. Margolis, J. J. Taylor: „Space-Time Reactor Dynamics“, 3rd International Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva 4, 41 (1964)
- [14] O. J. Marlowe, C. P. Saalbach, L. M. Culpepper, D. S. McCarty: „WANDA – A One-Dimensional Few Group Diffusion Equation Code for the IBM-704“, WAPD-TM-28, Pittsburgh (1956)
- [15] H. P. Flatt, D. C. Baller: „AIM-5, A Multigroup, One-Dimensional Diffusion Equation Code“, NAA-SR-4694, Canoga Park (1960)
- [16] K. F. Hansen, S. R. Johnson: „GAKIN – A One Dimensional Multigroup Kinetics Code“, GA-7543 (1967)
- [17] A. V. Vota, H. J. Curlee, A. F. Henry: „WIGL-3 A Program for the Steady-State and Transient Solution of the One Dimensional, Two-Group, Space-Time Diffusion Equations Accounting for Temperature, Xenon and Control Feedback“ WAPD-TM-788 (1969)
- [18] J. Barclay Andrews II, K. F. Hansen: „Numerical Solution of the Time-Dependent Multigroup Diffusion Equations“, Nuclear Science and Engineering 31, 304-313 (1968)
- [19] W. R. Rhyne, A. C. Lapsley: „A New Technique for Space-Time Kinetics“, Transactions of the American Nuclear Society 12, 618 (1969)
- [20] L. A. Hagemann, J. B. Yasinsky: „Comparison of Alternating-Direction Time-Differencing Methods with Other Implicit Methods for the Solution of the Neutron Group-Diffusion Equations“, Nuclear Science and Engineering 38, 8 (1969)
- [21] W. H. Reed, K. F. Hansen: „Two-Dimensional Reactor Kinetics“, Transactions of the American Nuclear Society 12, 234 (1969)
- [22] R. S. Denning, R. F. Redmond, S. S. Iyer: „A Stable Explicit Finite-Difference Technique for Spatial Kinetics“, Transactions of the American Nuclear Society 12, 148 (1969)
- [23] A. F. Henry: „Review of Computational Methods for Space Dependent Kinetics“, in Dynamics of Nuclear Systems, The University of Arizona Press, Tucson (1972)

- [24] K. F. Hansen: „Finite-Difference Solutions for Space-Dependent Kinetics Equations”, in Dynamics of Nuclear Systems, The University of Arizona Press, Tucson (1972)
- [25] A. L. Wright, K. F. Hansen, D. R. Fergusson: „Application of Alternating-Direction Implicit Methods to the Space-Dependent Kinetics Equations”, Nuclear Science and Engineering 44, 239-251 (1971)
- [26] M. R. Bruckner, J. W. Stewart: „Multidimensional Space-Time Nuclear Reactor Kinetics Studies – Part I: Theoretical”, Nuclear Science and Engineering 59, 289-297 (1976)
- [27] R. D. Lawrence, J. J. Dorning: „Smoothing and Extrapolation Techniques for Reactor Kinetics”, Nuclear Science and Engineering 64, 492-507 (1977)
- [28] N. Crouzet, P. J. Turinsky: „A Second-Derivative-Based Adaptive Time-Step Method for Spatial Kinetics Calculations”, Nuclear Science and Engineering 123, 206-214 (1996)
- [29] E. D. Larsen, R. P. Hughes: „Homogenized Diffusion Approximations to the Neutron Transport Equations”, Nuclear Science and Engineering 73, 274-285 (1980)
- [30] U. Shin, W. F. Miller Jr.: „Time-Dependent Simplified P_2 Equations: Asymptotic Analysis and Numerical Experiments”, Nuclear Science and Engineering 128, 27-46 (1998)
- [31] T. A. Brunner, J. P. Holloway: „Two Dimensional Time Dependent Riemann Solvers for Neutron Transport”, Mathematical Methods for Nuclear Applications, Salt Lake City 9-13. Sept. 2001
- [32] C.R.E. de Oliveira, A.J.H. Goddard: „EVENT - A Multidimensional Finite Element-Spherical Harmonics Radiation Transport Code”, Proceedings of the OECD International Seminar on 3D Deterministic Radiation Transport Codes, Paris 2-3. Dez. 1996
- [33] C.R.E. de Oliveira, C.C. Pain, A.J.H. Goddard: „The Finite Element Method for Time-Dependent Radiation Transport Applications”, Proceedings of the 1998 Radiation Protection and Shielding Topical Conference, Nashville 19-23. April 1998
- [34] P. Warner, C.R.E. de Oliveira: „Verification and Validation of the 3D Finite Element Transport Theory Code EVENT for Shielding Applications”, Journal of Nuclear Science and Technology 466-470 (2000)
- [35] R.T. Ackroyd and C.R.E. de Oliveira: „A Variational Treatment for the Time-Dependent Boltzmann Equation as a Basis for Numerical Solutions Conserving Neutrons”, Progress in Nuclear Energy 30, 417 (1996)
- [36] K. F. Hansen, B. V. Koen, W. W. Little, Jr.: „Stable Numerical Solutions of the Reactor Kinetics Equations”, Nuclear Science and Engineering 22, 51-59 (1965)
- [37] A. Foderaro, H. L. Garabedian: „Two Group Reactor Kinetics”, Nuclear Science and Engineering 14, 22-29, (1962)
- [38] R. Avery, „Theory of Coupled Reactors“, 2nd International Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy, 12, 182-191, Geneva 1-13. Sept 1958
- [39] M. Becker: „A Generalized Formulation of Point Nuclear Reactor Kinetics Equations”, Nuclear Science and Engineering 31, 458-464 (1968)
- [40] S. Kaplan, O. J. Marlowe, J. Bewick: „Application of Synthesis Techniques to Problems Involving Time Dependence”, Nuclear Science and Engineering 18, 163 (1964)
- [41] J. E. Meyer: „Synthesis of Three Dimensional Power Shapes”, 2nd international Conference on Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva 1-13. Sept 1958
- [42] R. B. Horst: „Synthesis Methods in R-Z Geometry”, Bettis Technical Review, WAPD-BT-8 (1958)
- [43] W. N. Lorentz: „Synthesis of Three Dimensional Power Shapes – Applications of Flux-Weighted synthesis Technique”, Bettis Technical Review, WAPD-BT-8 (1958)
- [44] S. Kaplan: „Some New Methods of Flux Synthesis”, Nuclear Science and Engineering 13, 22-31 (1962)
- [45] D. E. Dougherty, C. N. Shen: „Space-Time Neutron Kinetic Equations Obtained by the Semidirect Variational Method”, Nuclear Science and Engineering 13, 141-148 (1962)
- [46] J. B. Yasinsky, S. Kaplan: „Synthesis of Three-Dimensional Flux Shapes Using Discontinuous Sets of Trial Functions”, Nuclear Science and Engineering 28, 426-437 (1967)
- [47] W. M. Stacey: „A General Modal-Expansion Method for Obtaining Approximate Equations for Linear Systems”, Nuclear Science and Engineering 28, 438-442 (1967)

-
- [48] H. L. Garabedian, C. B. Leffert: „A Time-Dependent Analysis of Spatial Flux Distributions“, Nuclear Science and Engineering 6, 26-32 (1959)
- [49] S. Kaplan: „Synthesis Methods in Reactor Analysis“, Vol. 3, 233 in Advances in Nuclear Science and Technology, Ed. P. Greebler und E. J. Henley, Academic Press, New York (1966)
- [50] J. B. Yasinsky: „The Solution of the Space-Time Neutron Group Diffusion Equations by a Time-Discontinuous Synthesis Method“, Nuclear Science and Engineering 29, 381 (1967)
- [51] W. M. Stacey: „A Variational Multichannel Space-Time Synthesis Method for Nonseparable Reactor Transients“, Nuclear Science and Engineering 34, 45-56 (1968)
- [52] G. Kessler: „Zur numerischen Lösung der ortsabhängigen dynamischen Gleichungen schneller Brutreaktoren mit Hilfe eines Variationsprinzips“, Dissertationsschrift Karlsruhe (1968)
- [53] G. Kessler: „Space-Dependent Dynamic Behavior of Fast Reactors Using the Time-Discontinuous Synthesis Method“, Nuclear Science and Engineering 41, 115-148 (1970)
- [54] W. M. Stacey Jr.: „Space-Time Nuclear Reactor Kinetics“, Nuclear Science and Technology, Academic Press, New York (1969)
- [55] R. J. Neuhold: „Multiple Weighting Functions in Fast Reactor Space-Energy Synthesis“, Nuclear Science and Engineering 43, 74-86 (1971)
- [56] P. G. Lorenzini, A. H. Robinson: „Solutions of the Diffusion Equation by the Spectral-Synthesis Method“, Nuclear Science and Engineering 44, 27-36 (1971)
- [57] W. G. Price Jr., J. J. Duderstadt: „An Accelerated Spectral Synthesis Technique“, Nuclear Science and Engineering 55, 98-103 (1974)
- [58] N. Z. Cho: „Recent Developments in Reactor Physics and Kinetics“, The 2003 Frederic Joliot/Otto Hahn Summer School, Karlsruhe (2003)
- [59] D. Emendörfer, K. H. Höcker: „Theorie der Kernreaktoren“, Band 2: Der instationäre Reaktor, Bibliographisches Institut, Mannheim/Wien/Zürich (1993)
- [60] H. Plaza, W. H. Köhler: „Coupled-Reactor Kinetics Equations“, Nuclear Science and Engineering 26, 419-422 (1966)
- [61] D. R. Harris, R. G. Fluharty: „Coupled-Region Kinetics Formulations“, in Dynamics of Nuclear Systems, The University of Arizona Press, Tucson (1972)
- [62] G. D. Spriggs, R. D. Busch, J. G. Williams: „Two-Region Kinetic Model for Reflected Reactors“, Annals of Nuclear Energy, Vol. 24, No. 3, 205-250 (1997)
- [63] P. Bosio, P. Ravetto, M. M. Rostagno, A. Barzilov: „Multipoint Methods in Nuclear Reactor Kinetics“, ANS International Meeting on Mathematical Methods for Nuclear Applications, Salt Lake City 9-13. Sept. 2001
- [64] S. Langenbuch, W. Maurer, W. Werner: „Coarse-Mesh Flux-Expansion Method for the Analysis of Space-Time Effects in Large Light Water Reactor Cores“, Nuclear Science and Engineering 63, 437-456 (1977)
- [65] S. Langenbuch, W. Maurer, W. Werner: „High-Order Schemes for the Neutron Kinetics Calculations, Based on a Local Polynomial Approximation“, Nuclear Science and Engineering 64, 508-516 (1977)
- [66] H. Finneemann, F. Bennewitz, M. R. Wagner: „Interface Current Techniques for Multidimensional Reactor Calculations“, Atomkernenergie Bd. 30, 123-128 (1977)
- [67] H. D. Fischer, H. Finneemann: „The Nodal Integration Method – A Diverse Solver for Neutron Diffusion Problems“, Atomkernenergie Bd. 39, 229-236 (1981)
- [68] J. M. Putney: „A Hexagonal Geometry Nodal Expansion Method for Fast Reactor Calculations“, Progress in Nuclear Energy, Vol. 18, 113-121 (1986)
- [69] K. S. Smith: „An Analytic Nodal Method for Solving the Two-Group, Multidimensional, Static and Transient Neutron Diffusion Equations“, Dissertation am Massachusetts Institute of Technology (1979)
- [70] G. Greenman, K. Smith, A. F. Henry: „Recent Advances in an Analytic Nodal Method for Static and Transient Reactor Analysis“, Topl. Mtg. Computational Methods in Nuclear Engineering, Williamsburg VA, 23-25. April 1979, ANS
- [71] A. Hébert: „Development of the Nodal Collocation Method for Solving the Neutron Diffusion Equation“, Annals of Nuclear Energy Vol. 14, No. 10, 527-541 (1987)
-

- [72] G. Verdú, D. Ginestar, V. Vidal, J. L. Muñoz-Cobo: „A Consistent Multidimensional Nodal Method for Transient Calculations“, Annals of Nuclear Energy Vol. 22, No. 6, 395-410 (1995)
- [73] J. M. Noh, N. Z. Cho: „A New Approach of Analytic Basis Function Expansion to Neutron Diffusion Nodal Calculation“, Nuclear Science and Engineering 116, 165-181 (1994)
- [74] N. Z. Cho, J. M. Noh: „Analytic Function Expansion Nodal Method for Hexagonal Geometry“, Nuclear Science and Engineering 121, 245-253 (1995)
- [75] N. Z. Cho, Y. H. Kim, K. W. Park: „Extension of Analytic Function Expansion Nodal Method to Multigroup Problems in Hexagonal-Z Geometry“, Nuclear Science and Engineering 126, 35-47 (1997)
- [76] K. S. Moon, N. Z. Cho, J. M. Noh, S. G. Hong: „Acceleration of the Analytic Function Expansion Nodal Method by Two-Factor Two-Node Nonlinear Iteration“, Nuclear Science and Engineering 132, 194-202 (1999)
- [77] I. Dilber, E. E. Lewis: „Variational Nodal Methods for Neutron Transport“, Nuclear Science and Engineering 91, 132-142 (1985)
- [78] G. Palmiotti, C. B. Carrico, E. E. Lewis: „Variational Nodal Transport Methods with Anisotropic Scattering“, Nuclear Science and Engineering 115, 233-243 (1993)
- [79] E. E. Lewis, C. B. Carrico, G. Palmiotti: „Variational Nodal Formulation for the Spherical Harmonics Equations“, Nuclear Science and Engineering 122, 194-203 (1996)
- [80] E. E. Lewis, G. Palmiotti: „Simplified Spherical Harmonics in the Variational Method“, Nuclear Science and Engineering 126, 48-58 (1997)
- [81] R. A. Shober: „Nonlinear Methods for Solving the Diffusion Equation“, Dissertation am Massachusetts Institute of Technology (1976)
- [82] R. A. Shober: „A Nodal Method for Solving Transient Few-Group Neutron Diffusion Equations“, ANL-78-51, Argonne (1978)
- [83] R. A. Shober: „A Nodal Method for Fast Reactor Analysis“, Computational Methods in Nuclear Engineering, Williamsburg (1979)
- [84] M. R. Wagner: „A Nodal Discrete Ordinates Method for the Numerical Solution of the Multidimensional Transport Equation“, Computational Methods in Nuclear Engineering, Williamsburg VA, 23-25. April 1979, ANS
- [85] M. R. Wagner: „Three-Dimensional Nodal Diffusion and Transport Theory Methods for Hexagonal-z Geometry“, Nuclear Science and Engineering 103, 377-391 (1989)
- [86] J. A. Favorite: „A Variational Synthesis Nodal Discrete Ordinates Method“, Nuclear Science and Engineering 132, 181-193 (1999)
- [87] R. D. Lawrence, J. J. Dorning: „A Nodal Green's Function Method for Multidimensional Neutron Diffusion Calculations“, Nuclear Science and Engineering 76, 218-231 (1980)
- [88] W. Shen, Z. Xie, B. Yin: „The Green's Function Nodal Expansion Method for Light Water Reactor Diffusion Calculations“, Nuclear Science and Engineering 121, 130-135 (1995)
- [89] U. Grundmann, F. Hollstein: „A Two-Dimensional Intranodal Flux Expansion Method for Hexagonal Geometry“, Nuclear Science and Engineering 133, 201-212 (1999)
- [90] U. Grundmann: „3D Nodal Expansion Method HEXNEM for the Solution of Neutron Diffusion Equation in Hexagonal Geometry“, Jahrestagung Kerntechnik'99, Karlsruhe 18-20. Mai 1999
- [91] D. A. Menely, K. O. Ott, E. S. Wiener: „Fast Reactor Kinetics – The QX1 Code“, ANL-7769 Reactor Technology, Illinois (1971)
- [92] K. Ott, J. Madell: „Quasistatic Treatment of Spatial Phenomena in Reactor Dynamics“, Nuclear Science and Engineering 26, 563-565 (1966)
- [93] K. Ott, D. Menely, E. Wiener: „Quasistatic Treatment of Space Dependent Reactor Transients“, ANL-7210, 370-373 (1966)
- [94] K. Ott, D. Menely, E. Wiener: „Further Developments of the Quasistatic Neutron Kinetics Model“, ANL-7410, 398-400 (1968)
- [95] K. Ott, D. Menely, E. Wiener: „Influence of the Shape Function Time Derivative in Spatial Kinetics“, Transactions of the American Nuclear Society 12, 706 (1968)
- [96] K. Ott, D. Menely: „Accuracy of the Quasistatic Treatment of Spatial Reactor Kinetics“, Nuclear Science and Engineering 36, 402-411 (1969)

-
- [97] M. Dahmani, A. M. Baudron, J. J. Lautard, L. Erradi: „Application of the Nodal Mixed Dual Technique of Spatial Reactor Kinetics Using the Improved Quasi-static Method”, Mathematics and Computations, Reactor Physics and Environmental Analysis, Madrid 27-30. Sept 1999
- [98] J. A. Favorite, W. M. Stacey: „Variational Estimates for Use with Improved Quasistatic Method for Reactor Dynamics”, Nuclear Science and Engineering 126, 282-292 (1977)
- [99] SIMMER-III: A Computer Program for LMFR Core Disruptive Accident Analysis (Version 2.G), JNC TN 9400 2001-002 (2000)
- [100] C. J. Jackson, D. G. Cacuci, H. Finnemann: „Dimensionally Adaptive Neutron Kinetics for Multidimensional Reactor Safety Transients-I: New Features of RELAP5/PANBOX”, Nuclear Science and Engineering 131, 143-163 (1999)
- [101] persönliche Kommunikation mit C. H. Broeders
- [102] C. J. Jackson, D. G. Cacuci, H. Finnemann: „Dimensionally adaptive Neutron Kinetics for Multidimensional Reactor Safety Transients-II: Dimensionally Adaptive Switching Algorithms”, Nuclear Science and Engineering 131, 164-186 (1999)
- [103] RELAP 5/MOD 3, NUREG/CR 5535 (1990)
- [104] TRAC-PF1/MOD 2, „An Advanced Best-Estimate Computer Program for PWR Thermal-Hydraulic Analysis, NUREG/CR 5673, Los Alamos Laboratory (1992)
- [105] F. Barré et al: „The CATHARE Code Strategy and Assessment, Nuclear Engineering and Design 124, 229-245 (1990)
- [106] G. Lendhl, H. Austregesilo: „ATHLET Mod 1.1 Cycle C User's Manual, GRS-P-1/Vol. 1 (1995)
- [107] „The SAS4A LMFBR Accident Analysis Code System“, ANL/RAS 83-38 revision 2 (1988)
- [108] H.U. Wider: „The European Accident Code-2: Overview and Status”, The 1990 Fast Reactor Safety Meeting, Snowbird, Utah 12-16. Aug. 1990
- [109] S. Kondo et al.: „SIMMER-III : An Advanced Computer Program for LMFR Severe Accident Analysis”, ANP'92, Tokyo 25-29. Okt. 1992, Japan
- [110] R. Dagan, C. H. M. Broeders, D. Struwe, W. Pfrang: „SAS4ADS - 3D Space Time Dynamic Code System for ADS”, Jahrestagung Kerntechnik Stuttgart 14-16. Mai 2002
- [111] T. Beam, K. Ivanov, A. Baratta, H. Finnemann: „Nodal Kinetics Model Upgrade in the Penn State Coupled TRAC/NEM Codes,” Annals of Nuclear Energy, Vol. 26, No. 13, 1205-1221 (1999)
- [112] K. Ivanov, R. Macian, A. Irani, A. Baratta: „Features and Performance of a Coupled Three-Dimensional Thermal-Hydraulic/Kinetics PWR Analysis Code TRAC/PF1/NEM”, Annals of Nuclear Energy, Vol. 26, No. 14, 1116-1128 (1999)
- [113] R. Böer, R. Böhm, H. Finnemann, R. Müller: „The Coupled Neutronics and Thermal Hydraulics Code System PANBOX for PWR safety Analysis“, Kerntechnik 57, 49-54 (1992)
- [114] C. J. Jackson, H. Finnemann: „Verification of the Coupled RELAP5/PANBOX System with the NEACRP LWR Core transient Benchmark”, Mathematics and Computations, Reactor Physics and Environmental Analysis, Portland (1995)
- [115] T. Downar et al: „PARCS : Purdue Advanced Reactor Core Simulator”, PHYSOR-2002, Seoul 7-10. Okt. 2002
- [116] R. M. Miller et al: „Final Completion Report for the Coupled RELAP5/PARCS Code”, PU/NE-98-31, Purdue University (1998)
- [117] R. M. Miller et al: „Final Completion Report for the Coupled TRAC-M/PARCS Code”, PU/NE-99-20, Purdue University (1999)
- [118] J.-J. Lautard, S. Loubière, C. Fedon-Magnaud: „CRONOS2 a Modular Computational System for Neutronic Core Calculations”, IAEA Specialist Meeting on Advanced Calculations Methods for Power Reactors, Cadarache (1990)
- [119] E. Royer, I. Toumi: „CATARE-CRONOS-FLICA Coupling with ISAS: A Powerful Tool for Nuclear Studies”, 6th international Conference on Nuclear Engineering, ICONE-6472, Saclay 10-15. May 1998
- [120] U. Grundmann, U. Rohde: „DYN3D/M2-a Code for Calculations of Reactivity Transients in Cores with Hexagonal Geometry“, FZR 93-01 (1993)
-

- [121] U. Grundmann et al: „Coupling of the Thermal Hydraulics Code ATHLET with the Neutron Kinetics Model DYN3D“, Mathematics and Computations, Reactor Physics and Environmental Analysis, Portland 30. April - 4. Mai 1995
- [122] S. Langenbuch: „QUABOX/CUBBOX-HYCA, ein dreidimensionales Kernmodell mit parallelen Kühlkanälen für Leichtwasserreaktoren“, GRS-A-926, Garching (1984)
- [123] S. Langenbuch, K.-D. Schmiedt, K. Velkov: „The Coupled Code System ATHLET-CUBBOX/QUABOX, Model Features and Results for the Core Transients of the OECD PWR MSLB Benchmark“, Mathematics and Computations, Reactor Physics and Environmental Analysis, Madrid 27-30. Sept 1999
- [124] J. Kevorkian, J. D. Cole: „Multiple Scale and Singular Perturbation Methods“, Applied Mathematical Science 114, Springer, New York (1996)
- [125] G. Sandri: „The Foundations of Neoequilibrium Statistical Mechanics, I“, Annals of Physics, 24, 332-379 (1963)
- [126] G. Sandri: „The Foundations of Neoequilibrium Statistical Mechanics, II“, Annals of Physics, 24, 380-418 (1963)
- [127] G. Sandri: „A New Method of Expansion in Mathematical Physics“, Il Nuovo Cimento, Vol. 36, 67-93 (1965)
- [128] G. Sandri, R. Sullivan: „Constructive Approach in the Method of Extension“, Il Nuovo Cimento, Vol. 37, 1799-1800 (1965)
- [129] J. Kevorkian: „The Two Variable Expansion Procedure for the Approximate Solution of Certain Nonlinear Differential Equations“, Space Mathematics, Part 3, American Mathematical Society, Providence (1966)
- [130] W. Lick: „Two-Variable Expansions and Singular Perturbation Problems“, SIAM Journal of Applied Mathematics, Vol. 17, 815-825, No. 4 (1969)
- [131] J. B. Keller: „Darcy's Law for Flow in Porous Media and the Two Space Method“, in Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering and Applied Science Vol. 54 von R. L. Sternberg, A. J. Kalmowski und J. S. Papadakis, Marcel Dekker, New York (1980)
- [132] J. Kevorkian: „Perturbation Techniques for Oscillatory Systems with Slowly varying Coefficients“, SIAM Review, Vol. 29, No. 3 (1987)
- [133] D. A. Edwards: „An Alternative Example of the Method of Multiple Scales“, SIAM Review, Vol. 42, No. 2, 317-332 (2000)
- [134] E. W. Larsen, J. B. Keller: „Asymptotic Solution of Neutron Transport Problems for Small Mean Free Paths“, Journal of Mathematical Physics, Vol. 15, No. 1, 75-81 (1974)
- [135] E. W. Larsen: „Solution of the Steady, One Speed Neutron Transport Equation for Small Mean Free Paths“, Journal of Mathematical Physics, Vol. 15, No. 3, 299-305 (1974)
- [136] E. W. Larsen: „Neutron Transport and Diffusion in Inhomogeneous Media. I“, Journal of Mathematical Physics, Vol. 16, No. 7, 1421-1427 (1975)
- [137] E. W. Larsen: „Neutron Transport and Diffusion in Inhomogeneous Media. II“, Nuclear Science and Engineering 60, 357-368 (1976)
- [138] J. Duderstadt, L. Hamilton: „Nuclear Reactor Analysis“, John Wiley & Sons, Inc., New York (1976)
- [139] G. D. Spriggs, J. M. Campbell, V. M. Pikaikin: „An Eight-Group Delayed Neutron Model Based on a Consistent Set of Half-Lives“, LA-UR-98-1619, Los Alamos (1998)
- [140] „Delayed Neutron Data for the Major Actinides, Volume 6“, NEA/WPEC-6, Paris (2002)
- [141] A. M. Weinberg, E. P. Wigner: „The Physical Theory of Neutron Chain Reactors“, The University of Chicago Press, Chicago (1958)
- [142] M. Clark Jr., K. F. Hansen: „Numerical Methods of Reactor Analysis“, Nuclear Science and Technology 3, Academic Press, New York (1964)
- [143] P. S. Brantley, E. W. Larsen: „The Simplified P₃ Approximation“, Nuclear Science and Engineering 134, 1-21 (2000)

Lebenslauf

Persönliche Daten:

Name: Bruno Rudi Merk
Geburtsdatum: 12.02.1970
Geburtsort: Dietmannsried
Familienstand: ledig
wohnhaft in: 76646 Bruchsal
Im Fuchsloch 36
Tel.: 07251/302803
Email: bruno.merk@irs.fzk.de

Schulausbildung:

06/86	Mittlere Reife, Realschule Obergünzburg
06/91	Fachhochschulreife, Fachoberschule Kempten

Ausbildung:

08/89 - 05/90	Technischer Zeichner, Firma Multivac, Wolfertschwenden
---------------	--

Bundeswehr:

07/90	Prinz Franz Kaserne, Kempten
-------	------------------------------

Studium:

10/91 – 07/92	Vordiplom Maschinenbau, Fachhochschule Kempten
11/92 – 01/97	Maschinenwesen/Energietechnik, TU München

Studienbegleitende Tätigkeiten:

04/95 – 05/95	Semesterarbeit ABB Reaktor, Mannheim
08/95 – 12/95	Semesterarbeit Gesellschaft für Reaktorsicherheit, Garching
05/96 – 01/97	Diplomarbeit Gesellschaft für Reaktorsicherheit, Garching

Anstellung:

08/89 – 05/90	Technischer Zeichner, Firma Multivac, Wolfertschwenden
05/97 – 05/00	Nachwuchswissenschaftler, Institut für Neutronenphysik und Reaktortechnik, Forschungszentrum Karlsruhe
06/00 – 06/01	Nachwuchswissenschaftler, Institut für Reaktorsicherheit, Forschungszentrum Karlsruhe
07/01 – 01/04	Assistent am Institut für Kerntechnik und Reaktorsicherheit, Universität Karlsruhe

Sonderkurse:

08/98, 08/99, 08/01, 08/02 08/03	Frederic Joliot / Otto Hahn Summer School in Reaktor Physik 2 nd Summer School on Basic Actinide Research
--	---
